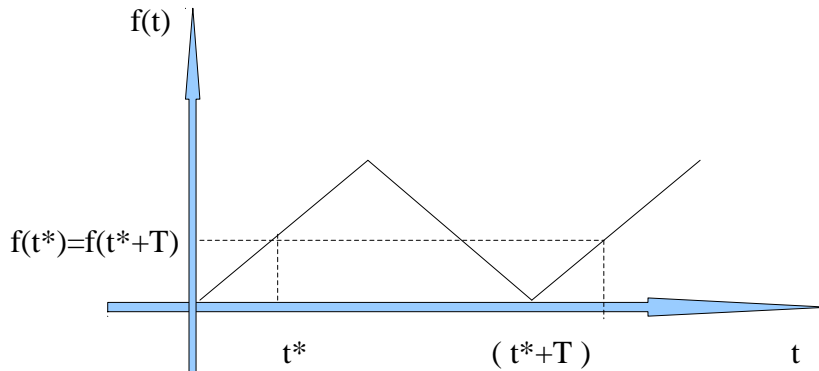


# 1. Segnali periodici nel dominio del tempo; significato fisico di derivata e di integrale

Una funzione  $f(t)$  si dice periodica se scelto a piacere un tempo  $t^*$  è possibile determinare un intervallo di tempo  $T$  detto periodo tale che  $f(t^*) = f(t^*+T)$  per ogni  $t=t^*$  scelto sull'asse dei tempi.



Se si considera  $f(t)=s$  con  $s$  spazio la suddetta dal punto di vista fisico è un'equazione di moto e in particolare rettilineo uniforme se

$$s(t) = t$$

la velocità del punto materiale è costante è tangente alla sua traiettoria spazio temporale descritta dall'equazione di moto stessa e vale, poiché il luogo delle tangenti ad una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato  $f(x)$  per ogni valore di  $x$  è la sua derivata

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 1$$

la accelerazione del punto materiale è tangente la funzione velocità tempo  $v(t)$  e perciò

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = s''(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0$$

nota infatti l'equazione di moto  $s(t)$  di un sistema comunque complesso sono note tutte le sue caratteristiche cinematiche (posizione, velocità e accelerazione) del moto.

In generale un moto uniformemente accelerato è rappresentato da una funzione di secondo grado nel dominio del tempo

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

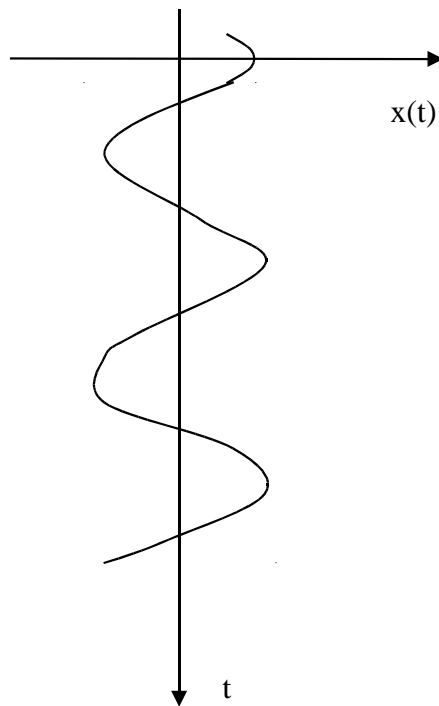
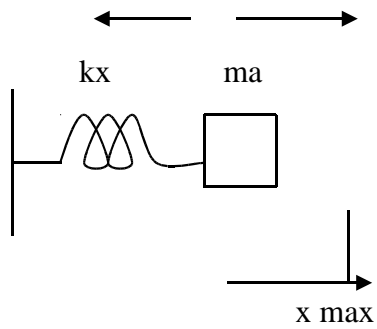
$$\text{infatti } s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

con  $a$ = accelerazione,  $v_0$ = velocità iniziale,  $s_0$  posizione iniziale

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = at + v_0$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = s''(t) = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = a$$

consideriamo una massa solidale ad una molla in assenza di gravità  $g$ , come in figura:



si posiziona inizialmente la massa in corrispondenza di  $x_{\max}$  e la si lascia andare così essa oscilla intorno alla posizione di riposo della molla  $x=0$  come in figura.

L'equazione di moto è della seguente forma:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \cos \omega \cdot t$$

Per l'equilibrio deve essere:

$$ma(t) = kx(t)$$

$$a(t) = \frac{k}{m} x(t)$$

$$a(t) = \frac{k}{m} x_{\max} \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$a(t) = -\frac{k}{m} x_{\max} \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = x''(t) = -\omega^2 A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \varphi)$$

e per analogia essendo:

$$A = x_{\max}$$

$$-\omega^2 = -\frac{k}{m}$$

da cui

$$A = x_{\max}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

## 1.1 moto circolare uniforme e funzione periodica sinusoidale

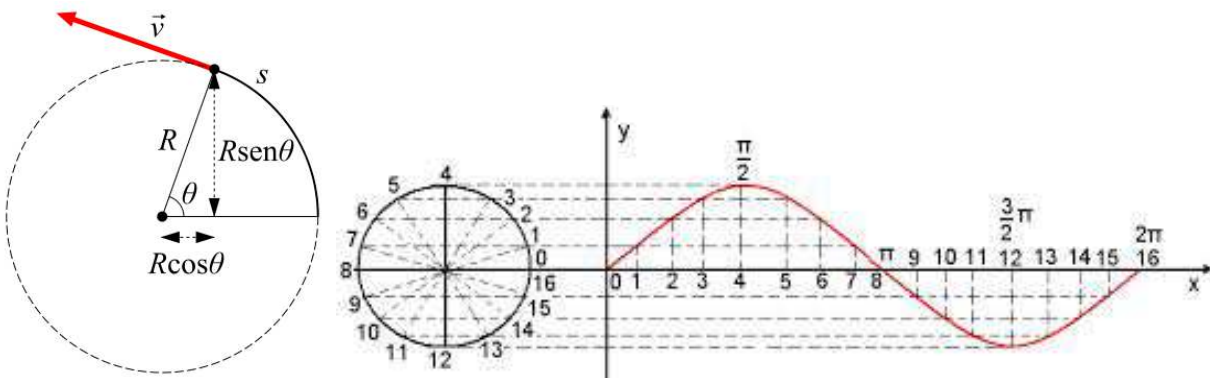


fig. cinematica del moto circolare uniforme e sinusoide

$s_y(t) = R \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \varphi)$        $s_x(t) = R \cdot \text{cos}(\omega \cdot t \pm \varphi)$ 
 nei nostri calcoli a seguire considereremo solo  $s_y(t)$  per semplicità e andremo a calcolare la  $v_y(t)$  e  $a_y(t)$  eseguendo le derivate successive come suddetto. Saremo anche in grado di calcolare massimi e minimi delle caratteristiche cinematiche del moto ricordando che  $s_x$  è sfasata in anticipo di  $\frac{\pi}{2}$  rispetto a  $s_y(t)$

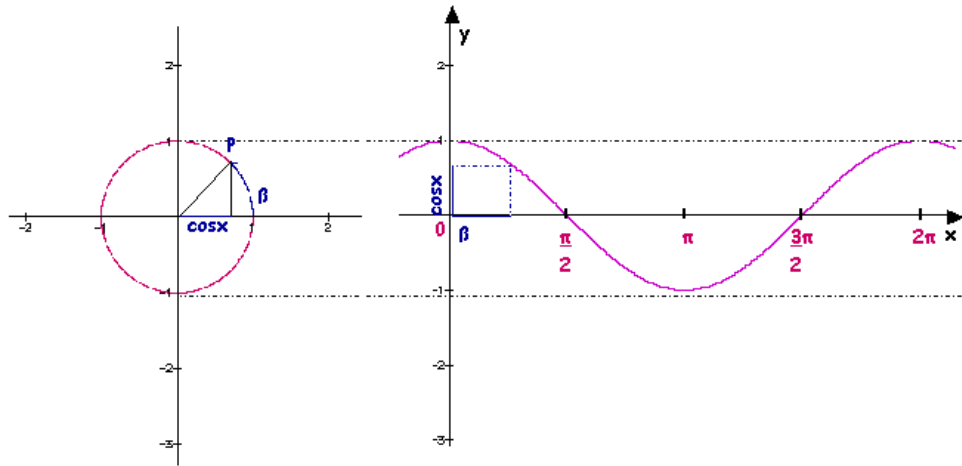


Fig.  $y = \cos x$

rif.

[http://www.scuolaelettrica.it/buratto/regime\\_sinusoidale.htm](http://www.scuolaelettrica.it/buratto/regime_sinusoidale.htm)

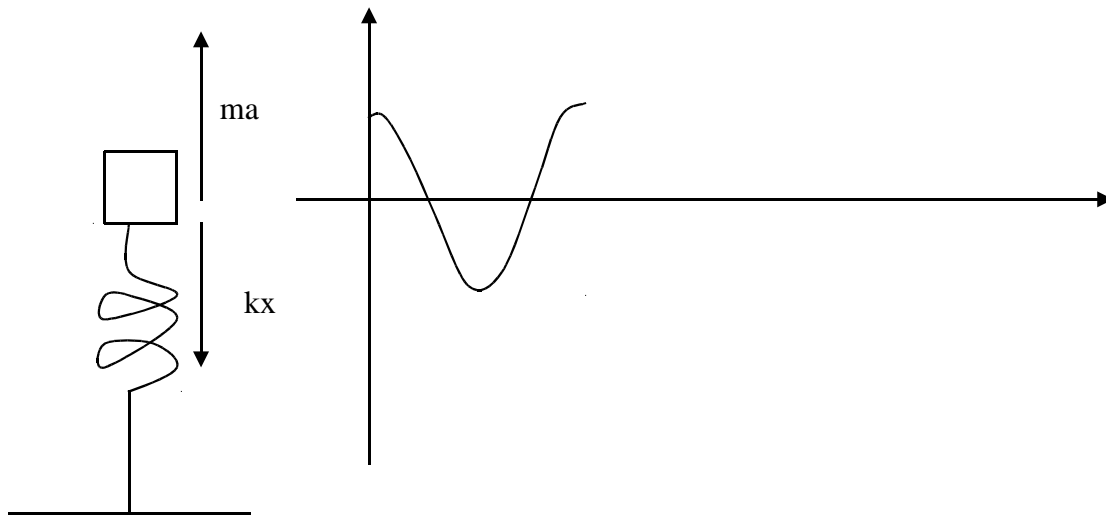
[http://it.wikipedia.org/wiki/Moto\\_circolare](http://it.wikipedia.org/wiki/Moto_circolare)

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Simple\\_harmonic\\_motion\\_animation.gif](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/74/Simple_harmonic_motion_animation.gif)

Libro di testo

## Esercizi di fisica collegati con le funzioni periodiche

Consideriamo una massa solidale ad una molla in assenza di gravità  $g$ , come in figura:



si posiziona inizialmente la massa in corrispondenza di  $y_{\max}$  e la si lascia andare così essa oscilla intorno alla posizione di riposo della molla  $y=0$  come in figura.

L'equazione di moto è della seguente forma e la situazione è analoga all'esercizio precedente dove si sostituisce  $x(t)$  con  $y(t)$  e  $x_{\max}$  con  $y_{\max}$ :

$$y(t) = y_{\max} \cdot \cos \omega \cdot t$$

Per l'equilibrio deve essere:

$$ma(t) = ky(t)$$

$$a(t) = \frac{k}{m} y(t)$$

$$a(t) = \frac{k}{m} y_{\max} \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$a(t) = -\frac{k}{m} y_{\max} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

dalla lezione 9/10/13

$$a(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = y''(t) = -\omega^2 A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t \pm \varphi)$$

e per analogia essendo:

$$A = y_{\max}$$

$$-\omega^2 = -\frac{k}{m}$$

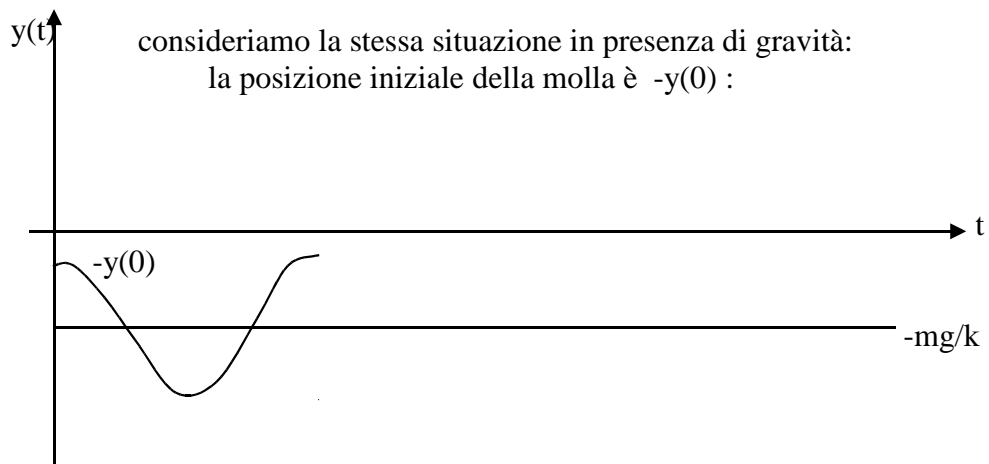
da cui

$$A = y_{\max}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



$$mg = -ky(0)$$

$$y(0) = -\frac{m}{k}g$$

e l'equazione di moto è:

$$y(t) = y_{\max} \cdot \cos \omega \cdot t - \frac{m}{k}g$$

con  $C = -\frac{m}{k}g$  *componente continua del segnale  $y(t)$*  (vedi lez.9/10)

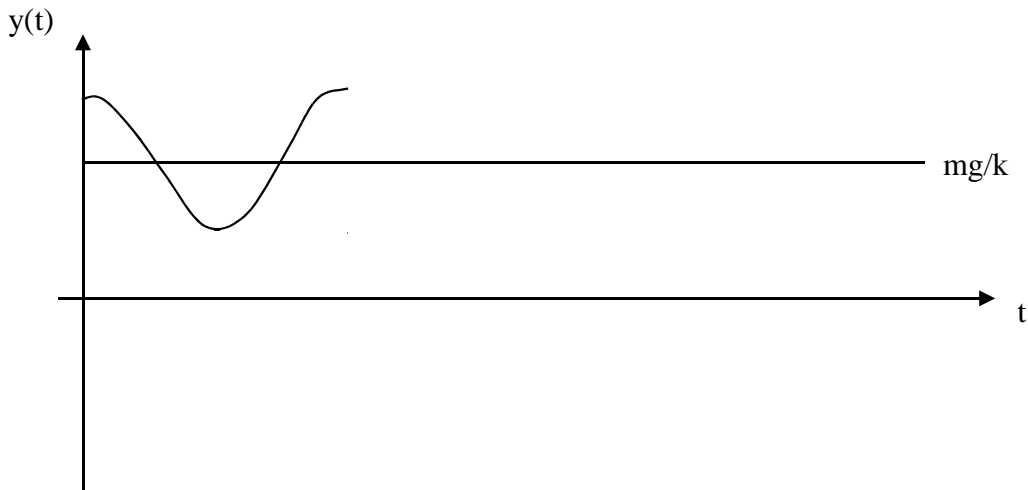
gli altri parametri non cambiano

Se la molla è appesa in senso inverso rispetto al precedente considerato, non cambierà nulla in assenza di  $g$  mentre in presenza di  $g$  (caso precedente) la componente continua  $C$  è positiva e vale:

$$y(0) = \frac{m}{k} g$$

e

$$y(t) = y_{\max} \cdot \cos \omega \cdot t + \frac{m}{k} g \text{ gli altri parametri restano invariati.}$$



### 1.3 Parametri fondamentali delle funzioni periodiche

Abbiamo dimostrato che una funzione periodica si esprime analiticamente così:

$$f(t) = A \sin(\omega \cdot t \pm \varphi)$$

l'ampiezza o valore massimo è  $A$ ;

la pulsazione o velocità angolare è  $\omega$ ;

$t$  è la variabile  $\geq 0$  (per comodità si fissa l'istante iniziale della generazione del segnale (elettrico sonoro, elettromagnetico) e  $\varphi$  la fase.

La funzione del segnale traslato di  $C=(0,C)$  risulta:

$$f(t) = A \sin(\omega \cdot t \pm \varphi) + C$$

La velocità di variazione della funzione  $f(t)$  con  $C=0$  ( $C$  è detta componente continua del segnale):

$$f'(t) = A \omega \cos(\omega \cdot t \pm \varphi)$$

è massima quando

$$f''(t) = -A \omega^2 \sin(\omega \cdot t \pm \varphi) = 0$$

cioè per

$$\omega \cdot t \pm \varphi = 0 + k\pi \text{ con } k = 1, 2, \dots, \text{int}$$

se si considera  $\varphi = 0$ :

la velocità di variazione del segnale è massima per  $t=0$  con periodicità di  $\pi$  ed è ottenuta sostituendo  $t=0$  in  $f'(t)$  (NB) e  $\varphi = 0$  e **COMUNQUE** vale

$$v_{\max} = A \omega$$

si ricorda che se  $A$  è associato al raggio di rotazione circolare uniforme di un punto materiale attorno ad un polo fisso la velocità in modulo è costante e vale

$$v = R \omega$$

con r raggio della circonferenza

dobbiamo parlare di modulo costante in questo esempio il che può trarre in confusione con la velocità massima sopra calcolata. Il segnale sinusoidale è messo in relazione alla proiezione del vettore spostamento (e da qui di quello velocità) sull'asse y che in caso di *circonferenza unitaria* è  $y = \sin x$  e da qui se x è direzione di propagazione dell'onda risulta ricordando sempre a parte che  $\lambda =$  lunghezza d'onda [m] in relazione alla velocità del segnale che non è mai infinita.

se

T= periodo [s]

Allora  $x = \frac{2\pi}{T}t$  con x in radianti [rad]

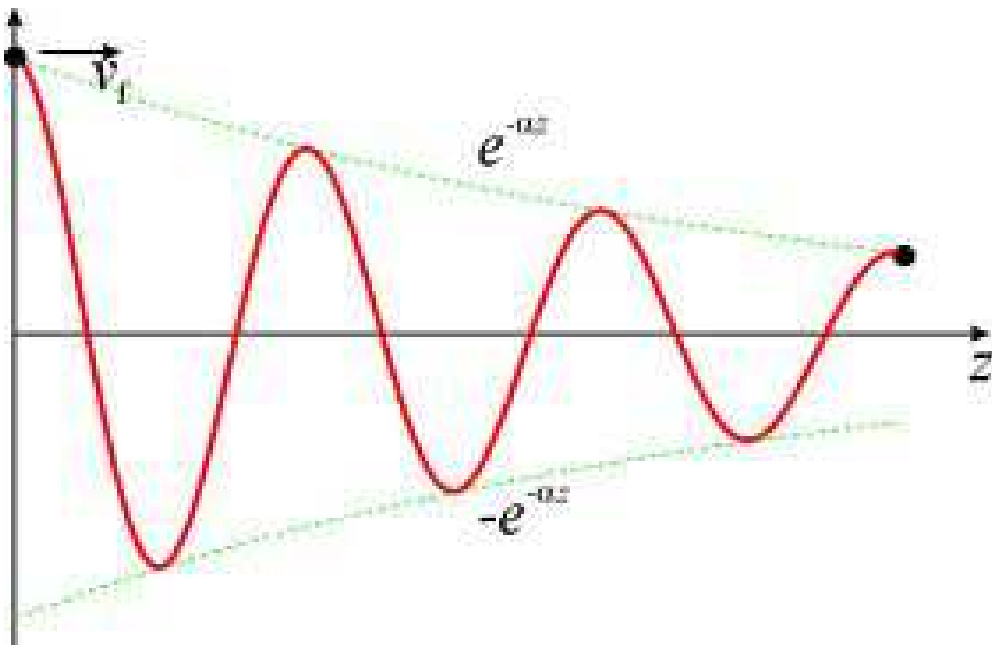
Ricordando che  $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow x = \omega \cdot t$

Studiare il segnale

$f(t) = e^{-t} (5 \sin 2 \cdot t)$  vedi fig.pagina seguente

calcolare e disegnare la funzione velocità e accelerazione, calcolare velocità e accelerazione massima di *variazione* del segnale, calcolare T del segnale dire di quale moto di tratterebbe se la funzione f(t) fosse un'equazione oraria di moto di un punto materiale. Calcolare il valore massimo assoluto e degli altri massimi/minimi in figura, calcolare i valori in cui la funzione si azzerava.

(se il segnale è un'equazione di moto di un punto materiale allora si calcola nello stesso modo la velocità e l'accelerazione del punto. Il segnale che in seguito considereremo elettrico può essere infatti associato come visto anche ad un'equazione oraria di moto tali considerazioni si applicano anche a moti qualunque).



## Esercizi:

$$f(t) = \ln e^{-t} (5 \operatorname{sen} 2 \cdot t)$$

$$f(t) = \ln t (5 \operatorname{sen} 2 \cdot t) \quad f(t) = \frac{12 \operatorname{sen} 2 \cdot t}{2t} \quad f(t) = t^2 (\operatorname{sen} t) \quad f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t-1} \quad f(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$$

$$f(t) = e^t \ln e^{-t} (5 \operatorname{sen} 2 \cdot t) \quad f(t) = e^{-t} \ln e^t (8 \operatorname{sen} 6 t)$$

per  $t > 0$  da ricordare

la rampa unitaria  $f(t) = t$

la parabola unitaria  $f(t) = t^2$

impulso unitario  $f(t) = 1/t$  per il tempo  $t$  (area 1)

gradino unitario  $f(t) = 1$

per esercizio scrivere onda quadra unitaria con duty C. 20%

Es.0

Consideriamo il seguente segnale elettromagnetico nel vuoto:

$$V(t) = 12 \operatorname{sen} \left( 50000 t - \frac{\pi}{3} \right)$$

Calcolare: lunghezza d'onda  $\lambda$  [m], frequenza  $f$ , Ampiezza massima fase ....

la forma generale dell'onda alternata è:

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t \pm \phi)$$

A=ampiezza massima=12

$\omega$ =pulsazione o velocità angolare=50000  $\frac{\operatorname{rad}}{\operatorname{s}}$

$\phi$ =fase=  $-\frac{\pi}{3}$

N.B: un radiante è la misura dell'arco di circonferenza unitaria (cioè raggio =1) sotteso dall'angolo di circa  $57^\circ$  infatti

$$2\pi : 360^\circ = 1 \operatorname{rad} : x \\ x = \frac{360}{2\pi} = 57^\circ \operatorname{circa}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

T=periodo[s]=tempo impiegato a compiere un giro completo quindi:

1 giro: T = x giri: 1s

$$\frac{1 \operatorname{giro}}{T \operatorname{sec ondi}} = \frac{x \operatorname{giri}}{1 \operatorname{s}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{50000} = 0,00013 \text{ s}$$

Calcolare dopo quanto tempo  $t$  la funzione  $V(t)$  si azzeri la 1° volta:

si pone  $V(t)=0$  perciò:

$$V(t) = 12 \cdot \sin\left(50000t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\text{da cui } \left(50000t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$t = \frac{\pi}{150000} = \frac{1}{50000} \text{ s}$$

Calcolare il valore di  $V(t)$  al tempo=0

$$V(0) = 12 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -12 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = -10,3 \text{ V}$$

1. Si consideri un pendolo con  $l=2$  m e  $\varphi=30^\circ$   $g=9,8$  m/s<sup>2</sup> (fase che fornisce la posizione iniziale del pendolo)

calcolare l'equazione di moto e calcolare i parametri cinematici (pulsazione, periodo e frequenza).

2. Un'onda E.M nel vuoto ha una lunghezza d'onda di 400 nm (UV) calcolare la frequenza dell'onda.

Un suono nell'acqua ha una frequenza di  $f=40$  KHz dire se si tratta di un suono udibile dall'uomo e quanto vale la sua lunghezza d'onda.

3. Scrivere in forma complessa il vettore con modulo  $|\vec{v}| = 10$  e fase  $\varphi = \frac{\pi}{3}$

quindi scrivere il suo coniugato e calcolare l'eqz di 2° grado che ha per soluzioni i due numeri complessi così ottenuti.

4. Scrivere in forma di vettore rotante i vettori  $\vec{v} = 3 - j5$   $\vec{u} = 4 + j3$

disegnarli nel piano di Gauss e calcolare il vettore risultante disegnarlo e riceverlo in forma complessa, e come vettore rotante.

Es.5

$$V = 20\sin(6280t - (\pi/6))$$

$$V_{pp} = 40V$$

$$V_{max} = 20V$$

$$V_{eff} = (V_{max}/\sqrt{2}) = 20 \cdot 0,707 = 14,14V$$

$$T = (1/f) = (1/10^3) = 10^{-3} = 1ms$$

$$f = (\omega/2\pi) = (6280/6,28) = 1000Hz = 1KHz$$

$$\omega = 6280(\text{rad/sec})$$

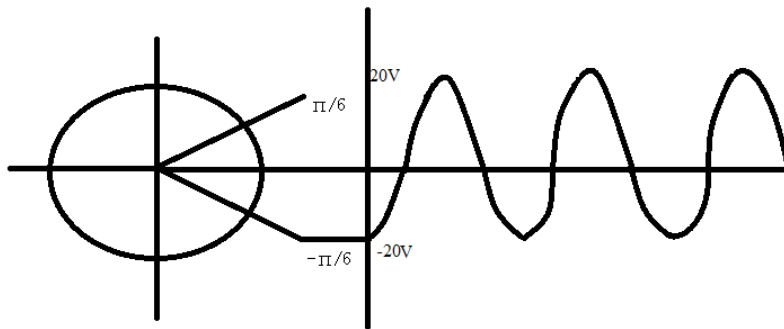
$$\varphi = (-\pi/6)$$

$$V(0) = 20\sin(6280 \cdot 0 - (\pi/6)) = 10V$$

$$V_m = V_{\max} \cdot (2/\pi)$$

La componente continua  $V_{dc} = 0V$

La componente alternata  $V_{ac} = 20V$



Se la componente continua fosse uguale a 5V e  $V_{ac} = 10V$ , stessa frequenza e stessa fase, allora  $V(t) = 20\sin(6280t - (\pi/6)) + 5$

studiare la funzione precedente avente ampiezza 1/t

### 1.4 Teorema di Fourier

Un comunque complesso segnale periodico si può ottenere come somma di infiniti segnali sinusoidali e cosinusoidali di frequenza multipla intera del segnale originario detta frequenza fondamentale (e il segnale è la armonica fondamentale) e ampiezza  $B_n$  e  $C_n$  data da formule integrali.

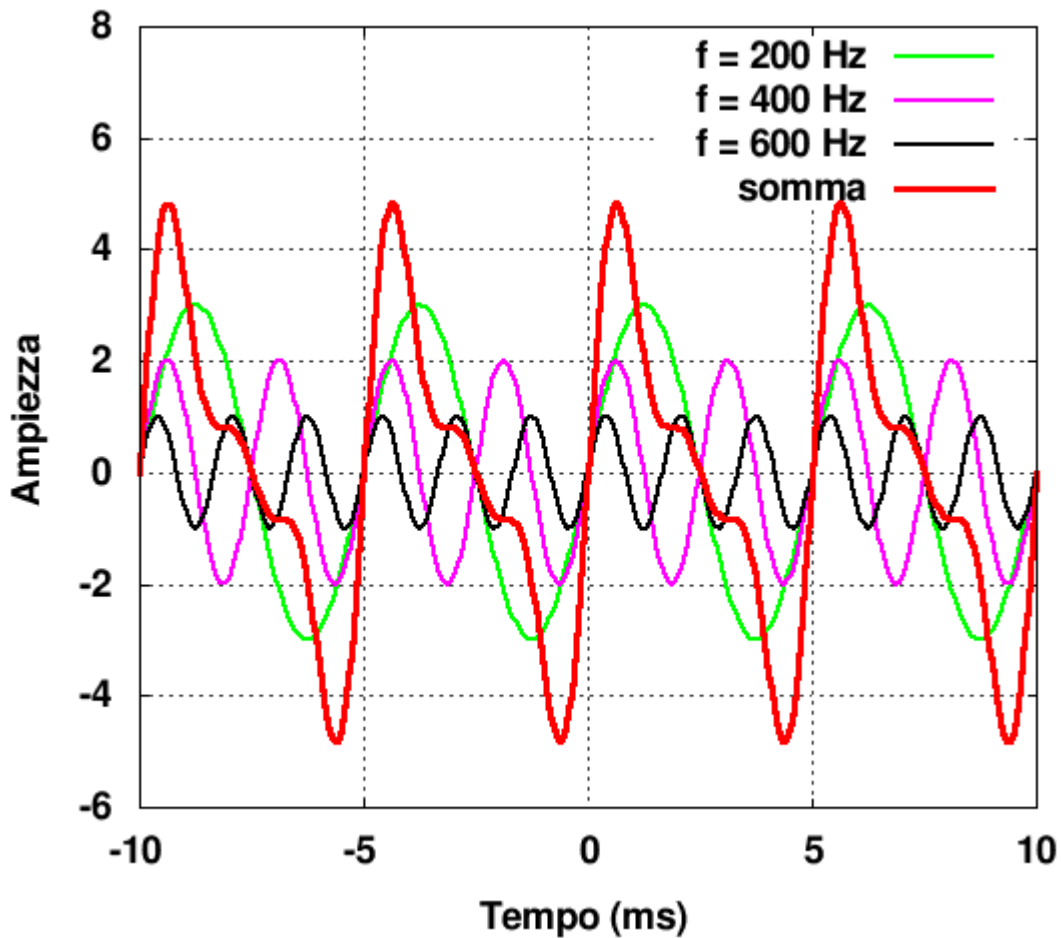
$$f(t) = f_m + B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(2\omega t) + \dots + B_n \sin(n\omega t) + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \cos(2\omega t) + \dots + C_n \cos(n\omega t)$$

$f_m$  è la componente continua del segnale o anche la tensione continua media pesata sul periodo del segnale da scmporre.

Il teorema appena enunciato permette di acquisire un segnale audio oppure un onda elettromagnetica complessi, realizzando dei filtri attivi : inlinea gereleN° Avogadro: 6.02 1024 .

Costante di Planck 6.63 10-34 Js

Dato il seguente grafico  $f(t) = y(t)$  nel dominio del tempo (Completare a casa per la prossima lezione)



$$y(t) = 3 \cdot \sin(400\pi t) + 2 \cdot \sin(800\pi t) + \sin(1200\pi t)$$

Tracciare lo spettro Ampiezza (ordinate) frequenza (ascisse): indicare nel grafico la armonica fondamentale la seconda e la terza

Scrivere il teorema di Fourier:

Progettare i filtri passivi necessari per la “multiplazione” del prima e della terza armonica del segnale complesso  $y(t)$ . Le stesse saranno gli ingressi ad un multiplatore (MUX analogico)

Realizzare il circuito digitale in porte logiche per la realizzazione degli ingressi selezione (più di uno?) e quindi disegnare lo schema logico funzionale ed elettronico.

Studiare le seguenti funzioni:  $f(t) = te^{-t}$   $f(t) = t^2e^{-t}$   $f(t) = \frac{1}{t}e^{-t}$

$$f(t) = te^{-t} \sin 400\pi t$$

$$f(t) = t^2e^{-t} \sin 800\pi t$$

$$f(t) = \frac{1}{t}e^{-t} \sin 1200\pi t$$

## 2. Cenni sui numeri complessi

si consideri la seguente equazione oraria

$$s(t) = 3t^2 - 2t + 1$$

Studiamo la seguente equazione oraria di moto:

Campo di esistenza

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Segno sempre positivo infatti l'intersezione con l'asse  $s(t)=0$  non ha soluzioni in campo reale perché

$$\Delta < 0 \quad \Delta < 0$$

l'intersezione con l'asse  $t=0$  è per  $s(0)=1$  (sostituisco 0 a  $t$  nella  $s(t)$  su scritta);

disegnata la parabola  $s(t)$  il suo minimo è a tangente orizzontale cioè  $s'(t)=0$

$$v(t) = 6t - 2 = 0$$

per  $t=1/3$  e la velocità è  $v(1/3) = 0$

la velocità massima e minima si calcolano imponendo la derivata della velocità  $=0$  cioè

$6=0$  mai (non ci sono massimi e minimi);

L'accelerazione è  $a(t)=6$  costante per ogni tempo.

Come si diceva Segno di  $s(t)$  sempre positivo in particolare:

$$s(t) = 3t^2 - 2t + 1$$

$$3t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1-3}}{3} = \frac{1 + \sqrt{-2}}{3} = \frac{1 + \sqrt{-1}\sqrt{2}}{3} = \frac{1 + j\sqrt{2}}{3} \quad (\text{avendoposto } j = \sqrt{-1})$$

$$\frac{1 - \sqrt{-2}}{3} = \frac{1 - \sqrt{-1}\sqrt{2}}{3} = \frac{1 - j\sqrt{2}}{3}$$

$j$  si dice unità immaginaria.

le due soluzioni sono numeri complessi e appartengono all'insieme  $C$  dei numeri complessi. Questi sono composti da una parte Reale ( $Re$ ) e da una parte immaginaria ( $Im$ ); nel nostro caso:

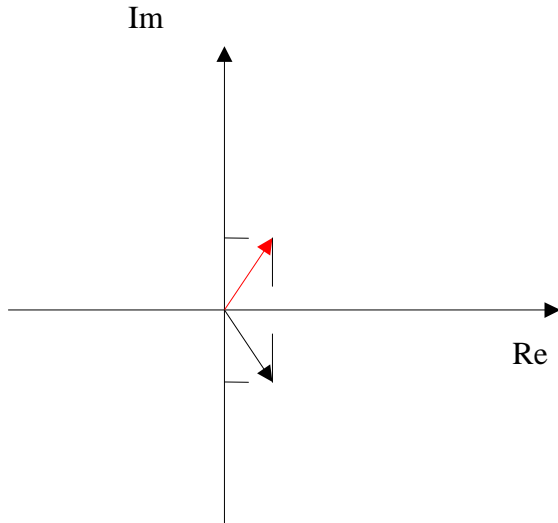
$$Re(t_1) = Re(t_2) = \frac{1}{3};$$

$$Im(t_1) = \frac{\sqrt{2}}{3};$$

$$Im(t_2) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Come sappiamo i numeri Reali sono in corrispondenza biunivoca con una retta in cui si fissi origine e direzione; su questa retta si ritroveranno tutti gli elementi dell'insieme reale  $R$ .

L'insieme complesso  $C$  è in corrispondenza biunivoca con un piano (Piano di Gauss) in cui si fissi origine e direzioni degli assi Reale e Immaginario ortogonali tra loro; in questo si ritroveranno tutti gli elementi dell'insieme complesso  $C$  (N.B. elementi di  $C$  sono gli elementi Reali e gli elementi immaginari).



Si identificano sul piano due vettori che sono completamente determinati quando si conosce il loro cosiddetto modulo e la loro fase cioè l'angolo sotteso dal vettore e l'asse Re. I due vettori in oggetto differiscono per il segno della parte immaginaria e si dicono numeri complessi coniugati ed hanno la proprietà che il loro prodotto è un numero reale.

### Esercizi

1. Si consideri un pendolo con  $l=2$  m e  $\varphi=30^\circ$   $g=9,8$  m/s<sup>2</sup> (fase che fornisce la posizione iniziale del pendolo) calcolare l'equazione di moto e calcolare i parametri cinematici (pulsazione, periodo e frequenza).

2. Un'onda E.M nel vuoto ha una lunghezza d'onda di 400 nm (UV) calcolare la frequenza dell'onda.

Un suono nell'acqua ha una frequenza di  $f=40$  KHz dire se si tratta di un suono udibile dall'uomo e quanto vale la sua lunghezza d'onda.

3. Scrivere in forma complessa il vettore con modulo  $|\vec{v}| = 10$  e fase  $\varphi = \frac{\pi}{3}$

quindi scrivere il suo coniugato e calcolare l'eqz di 2° grado che ha per soluzioni i due numeri complessi così ottenuti.

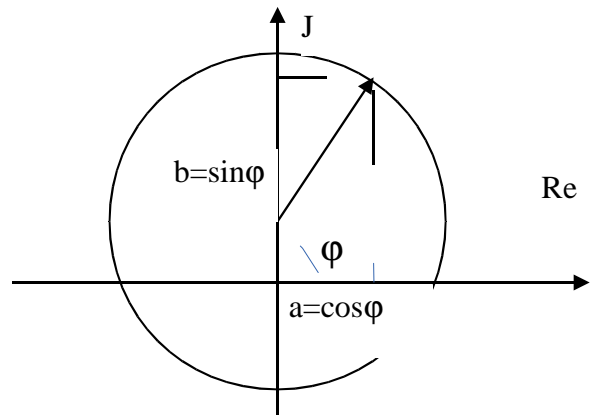
4. Scrivere in forma di vettore rotante i vettori  $\vec{v} = 3 - j5$   $\vec{u} = 4 + j3$

disegnarli nel piano di Gauss e calcolare il vettore risultante disegnarlo e scriverlo in forma complessa, e come vettore rotante.

## 2.1 Tre rappresentazioni dei vettori

I vettori statici si scrivono nelle seguenti rappresentazioni matematiche fra loro equivalenti:

1. rappresentazione cartesiana  $\vec{v} = a \pm jb$
2. rappr.ne polare:  $|\vec{v}|(\cos \phi + j \sin \phi)$
3. rappr.ne esponenziale:  $\vec{v} = |\vec{v}| e^{j\phi}$



### 2.1.1 formula di Eulero

$$(\cos \phi + j \sin \phi) = e^{j\phi}$$

si dimostra considerando intanto il rapporto fra le due che dovrebbe essere, se sono uguali, pari a 1

$$f(\phi) = \frac{(\cos \phi + j \sin \phi)}{e^{j\phi}} \quad (1.1) \quad e$$

calcoliamo la derivata della funzione ricordando che  $j$  è una costante:  $j = \sqrt{-1}$  e come tale va considerata nella derivazione:

$$f'(\phi) = \frac{e^{j\phi}(-\sin \phi + j \cos \phi) - j e^{j\phi}(\cos \phi + j \sin \phi)}{e^{j2\phi}}$$

svolgendo i prodotti si ottiene

$$f'(\phi) = \frac{-e^{j\phi} \sin \phi + j e^{j\phi} \cos \phi - j e^{j\phi} \cos \phi - j^2 e^{j\phi} \sin \phi}{e^{j2\phi}} = 0$$

ciò significa che il rapporto (1.1) è pari a una **costante** per ogni valore di  $\phi$ : basta perciò calcolare quanto vale per un valore di  $\phi$  per sapere il suo valore; il valore ideale è  $\phi=0$

$$f(0) = \frac{(\cos 0 + j \sin 0)}{e^{j0}} = 1$$

quindi

$$f(\phi) = \frac{(\cos \phi + j \sin \phi)}{e^{j\phi}} = 1 \quad \text{e ciò implica che la rappresentazione 2 e 3 sono equivalenti.}$$

### 3. Impedenza

Consideriamo ora un circuito elettrico alimentato da un generatore di f.e.m composto dalla serie di una R, una C e una L come in figura 1:

si suppone che in tale circuito la corrente  $i(t)$  sia sinusoidale alternata tale che:

$$i(t) = I_{Max} \sin(\omega t + \varphi)$$

vale la seguente equazione di conservazione dell'energia elettrica:

$$V_{gen}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C} \quad (1)$$

questa equazione non lineare *nel dominio del tempo* è detta integro differenziale non omogenea nel dominio del tempo ed è comune a tutti i problemi fisici relativi a funzioni periodiche che abbiamo fin qui visto e che generano equazioni cardinali di equilibrio nel dominio del tempo di tipo non lineare vale a dire differenziali, integrali o come quella sùscritta.

Le altre tre equazioni del sistema sono le seguenti:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad \text{la d.d.p ai capi del condensatore}$$

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad \text{la d.d.p ai capi dell'induttanza}$$

$$V_R(t) = Ri \quad \text{la d.d.p ai capi della resistenza.}$$

Consideriamo un

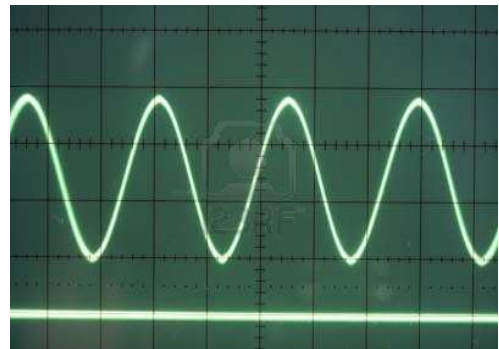
#### 3.1 circuito corrente /tensione alternata composto da una resistenza pura

La seconda legge di Ohm  $R = \rho \frac{l}{S}$  [Ohm] con dimensioni

della resistività  $\rho \left[ \Omega \frac{mm^2}{m} \right]$

La R è la costante di diretta proporzionalità fra la d.d.p ai suoi capi e la corrente che la attraversa..

sia  $i(t) = I_{Max} \sin \omega t$  [A]

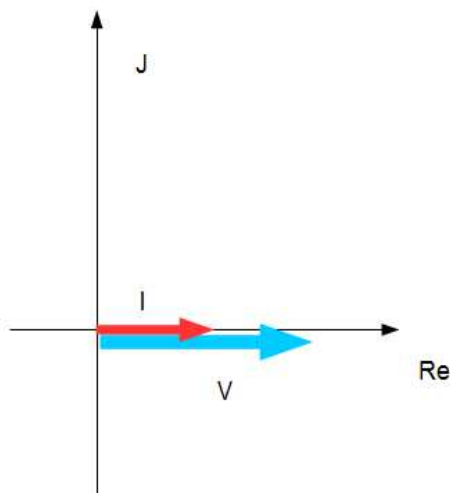


(se si trascurano gli effetti di variazione del valore di R con la temperatura, ma ricordando che tale caratteristica della resistività dei materiali può essere utilizzata come sensore termico a ponte di W. Vedi seguito) la d.d.p misurata ai capi della R è:

$$V_R(t) = R i(t) = R I_{Max} \sin \omega t \text{ [V]}$$

La tensione ai capi della resistenza è in fase con la corrente  $i(t)$  che la attraversa

dal p.to di vista vettoriale risulta:



*i vettori statici vengono perciò scritti nelle seguenti forme:*

$\vec{I} = I_{Max}$   $\vec{V} = R I_{Max} + j 0$  e allorquando ruotano lo fanno in fase e con lo stesso periodo per quanto scritto.

### 3.2 circuito corrente /tensione alternata composto da una capacità pura

Sia  $i(t) = I_{Max} \sin \omega t$  Ampere

La capacità C [F] in Farad è la costante di proporzionalità diretta fra tensione ai capi delle armature e la carica elettrica immagazzinata fra le armature stesse fra le quali è confinato un materiale detto dielettrico.

risulta

$$C \dot{V}_C(t) = Q(t)$$

La capacità è funzione della geometria del condensatore , delle caratteristiche elettriche che dielettrico (oltre che della temperatura che qui trascuriamo) è data da

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d} \text{ [F]} \text{ con}$$

$\epsilon_0$  = costante dielettrica del vuoto

$\epsilon_r$  = costante dielettrica del mezzo d.

S = sezione di un armatura piana

d = distanza fra le armature.

ricordiamo inoltre una relazione fondamentale

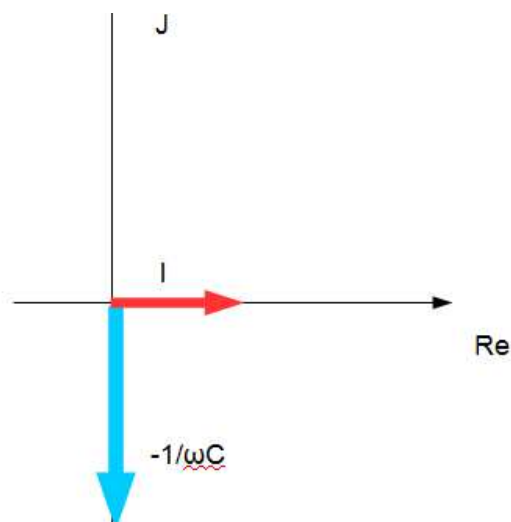
$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

da cui si ricava

$$Q(t) = \int I(t) dt \quad \text{Coulomb [C]}$$

e perciò:

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad \text{Volt}$$



$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt = \frac{I_{max}}{C} \frac{1}{\omega} (-\cos \omega t) = \frac{I_{max}}{C} \frac{1}{\omega} \text{sen} \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad [\text{V}]$$

La tensione ai capi del condensatore è in ritardo di fase di  $\pi/2$  rispetto alla corrente che la attraversa

dal p.to di vista vettoriale risulta:

*i vettori statici vengono perciò scritti nelle seguenti forme:*

$$\vec{I} = I_{Max} \quad \vec{V}_C = 0 - j \frac{1}{\omega C} I_{Max}$$

### 3.3 Circuito corrente /tensione alternata composto da una induttanza pura

sia

$$i(t) = I_{Max} \sin \omega t \text{ Ampere}$$

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ Volt}$$

L chiamato induttanza (H, Henry) è la costante di diretta proporzionalità fra la tensione ai capi della stessa e la variazione di corrente elettrica che attraversa la bobina composta da n spire/m e lunga l metri : risulta per un solenoide nel vuoto

$$L = \mu_0 n^2 l S \text{ [H]} \quad \mu_0 = 2 \pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

mentre in un solenoide avvolto intrno ad un nucleo di ferro con permeabilità magnetica relativa di

circa  $1000 \frac{N}{A^2}$

$$L = \mu_0 \mu_r n^2 l S \text{ [H]}$$

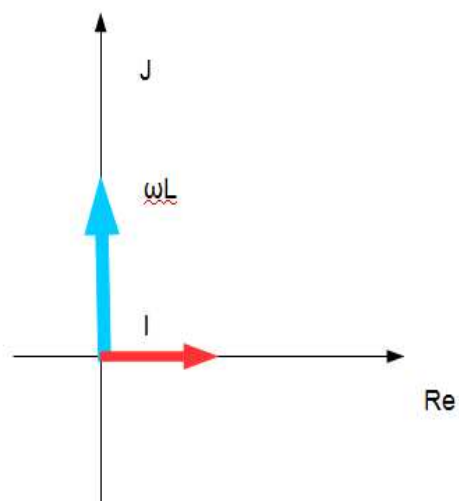
$$V_L(t) = \omega L (\cos \omega t) = \omega L \text{ sen} \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ [V]}$$

**La tensione ai capi dell'induttanza è in anticipo di fase di  $\pi/2$  rispetto alla corrente che la attraversa o anche: la corrente che attraversa l'induttanza è in ritardo di di fase di  $\pi/2$  rispetto alla tensione ai capi dell'induttanza stessa.**

dal p.to di vista vettoriale risulta:

i vettori statici vengono perciò scritti nelle seguenti forme:

$$\vec{I} = I_{Max} \quad \vec{V}_L = 0 + j\omega L I_{Max}$$



Il principio di sovrapposizione degli effetti in campo vettoriale si esplicita con il calcolo del vettore risultante delle tensioni ai capi dei 3 componenti R-L-C:

$$\vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L = I_{Max} \left( R - j \frac{1}{\omega C} + j\omega L \right) = I_{Max} \left( R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right) I_{Max} \vec{Z}$$
 questa relazione risolve il problema dell'equazione (1) ma non nel dominio del tempo dcome questa ma nel dominio della frequenza

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

oppure grazie alle precedenti relazioni di uguaglianza

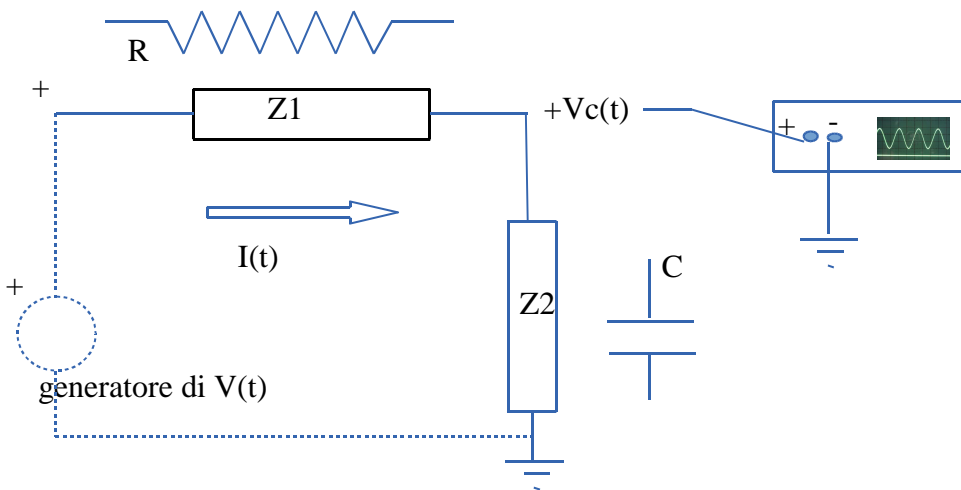
### 3.4 legge di Ohm generalizzata

$$\vec{V}_{Gen} = \vec{Z} \vec{I}$$

Z e detta impedenza ed è un numero complesso rappresentata sul piano di Gauss da un vettore rotante.

in un qualsiasi circuito in alterna/alternata si sostituisce R L e C con una Z equivalente al componente in esame e si seguono le stesse regole tecniche per semplificare il circuito. di quelli puramente resistivi cioè composti esclusivamente da resistenze.

Consideriamo il seguente circuito vogliamo visualizzare e misurare con oscilloscopio la Vc al variare della frequenza della  $V(t) = V_{Max} \sin \omega t$  (2)



$$Z1 + Z2 = Z$$

$$\vec{Z} = R - \frac{j}{\omega C} \quad (\vec{Z}) = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \quad I_{max} = \frac{V_{max}}{(\vec{Z})} \text{ in fase con } V(t)$$

$$V_{Cmax} = (\vec{Z}_2) I_{max} = \frac{V_{max}}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{(\omega^2 C^2) \left( R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} \right)}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

e

per la pulsazione tendente a zero la tensione ai capi del condensatore a prescindere dalla sua fase tende a  $V_{max}$  cioè alle basse frequenze il condensatore è come un contatto aperto per pulsazione tendente all'infinito è come un contatto chiuso.

possiamo anche scrivere la precedente relazione in questo modo:

$$\frac{V_{Cmax}}{V_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}}$$

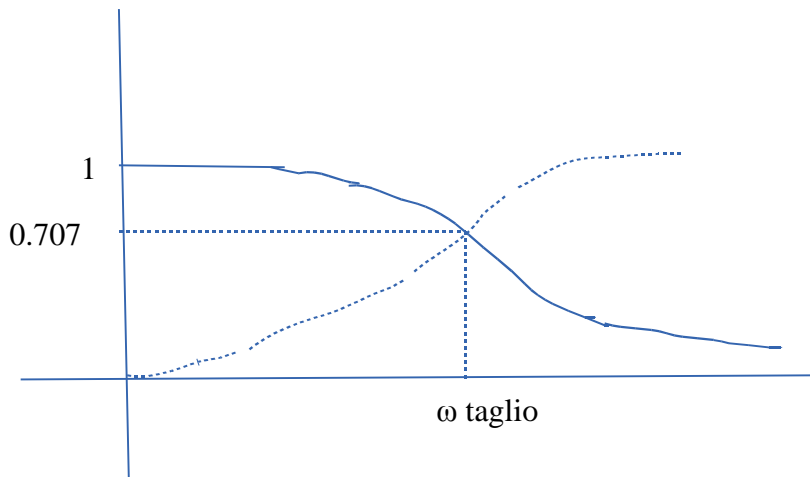
si osserva che il numeratore è la tensione prelevata dal circuito indicata perciò come grandezza in uscita oppure output, mentre il denominatore è il modulo della tensione fornita al circuito ed indicata come grandezza in ingresso oppure in input

Il rapporto

$$\frac{V_{Output}}{V_{Input}} = F.d.T$$

chiamata funzione di trasferimento del sistema.

In questo caso tale rapporto ha il seguente grafico in funzione della pulsazione:



la pulsazione di taglio è quella che si ha per un attenuazione di F.d.T pari a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  perciò:

$$\frac{V_{Cmax}}{V_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 C^2 R^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ da cui si ottiene } \omega = \frac{1}{RC} \text{ oppure}$$

frequenza di taglio  $f_i = \frac{1}{2\pi RC}$

il circuito precedente prende il nome di **filtro passa basso passivo** in riferimento alla bassa attenuazione del segnale che vale 0 dB per frequenza 0 e 3dB per la frequenza di taglio

Scambiando fra loro la posizione della stessa resistenza R e del condensatore C, prelevando la tensione Vr nello stesso punto del circuito al variare della frequenza del segnale (2) si ottiene:

$$V_{Rmax} = (\vec{Z}_1) I_{max} = \frac{RV_{max}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{\left(\frac{1}{R^2}\right)\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}\right)}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{\left(\omega^2 C^2 R^2\right) + 1}}$$

anche in questo caso come sempre si assume come pulsazione di taglio quella che si ha per un attenuazione di F.d.T pari a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  perciò:

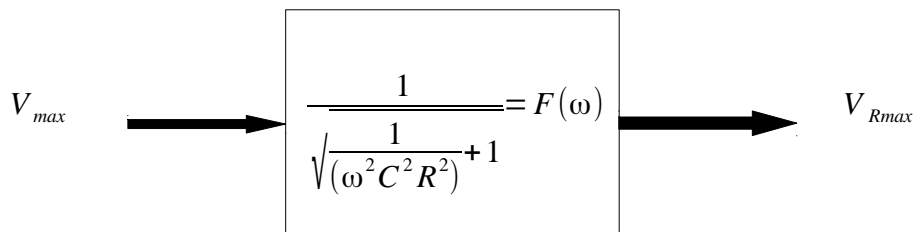
$$\frac{V_{Rmax}}{V_{max}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 C^2 R^2\right) + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

questo circuito prende il nome di **filtro passa alto passivo**.

Si ottiene la stessa pulsazione e di conseguenza la stessa frequenza di taglio del filtro passa basso passivo precedente; il grafico della funzione di trasferimento del circuito CR ora considerato passivo viene sovrapposto con linea tratteggiata al grafico della fdt del filtro passivo passa basso RC precedente. **I circuiti sono passivi perchè fdt < 1** (il sistema non è alimentato esternamente).

## 4. Funzione di trasferimento in azione e reazione (feedback) , introduzione alla regolazione e controllo

consideriamo il risultato del filtro passa alto che si può rappresentare schematicamente nel seguente modo:

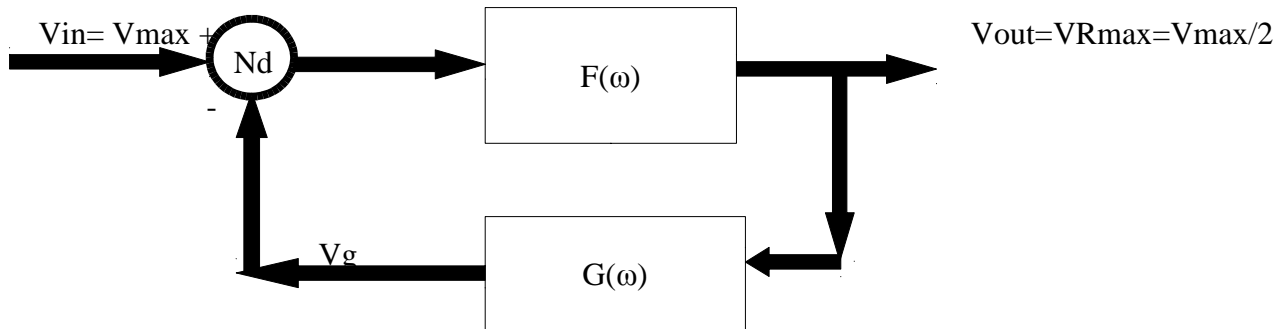


schema del sistema filtro pa (importante)

Si supponga ora che l'effetto di tale sistema sia indesiderato, vale a dire sia indesiderata un uscita alle alte frequenze pari a  $V_{max}$  (basta far tendere nella funzione di trasferimento all'interno del blocco la pulsazione a  $+\infty$ ) e si voglia intervenire sul sistema stesso per regolarlo, cioè per imporre una uscita prefissata da progetto e pari a qualsivoglia esigenza del progettista. Si supponga perciò di disporre di tale sistema e si desideri un uscita sempre pari a  $V_{Rmax} = \frac{V_{max}}{2}$  per qualsiasi frequenza..

Il metodo fondamentale con cui intervenire regolando l'uscita del sistema in modo hardware è quello del **feed-back o retroazione**. Lo schema proposto sopra è detto di **azione o ad anello aperto** e l'uscita dipende solo dalla funzione di trasferimento del sistema e lo stesso non è regolato; la funzione di trasferimento  $F(\omega)$  va intesa come una funzione **di processo** come quella svolta da una caldaia che in ingresso presenta in ingresso una certa portata di gas e in uscita la temperatura ambientale: nelle condizioni non regolate non esiste alcuna correlazione fra portata di gas e temperatura ambiente e il sistema non è regolato, la temperatura ambiente potrebbe salire o scendere senza interventi sul flusso di gas nel bruciatore della caldaia.

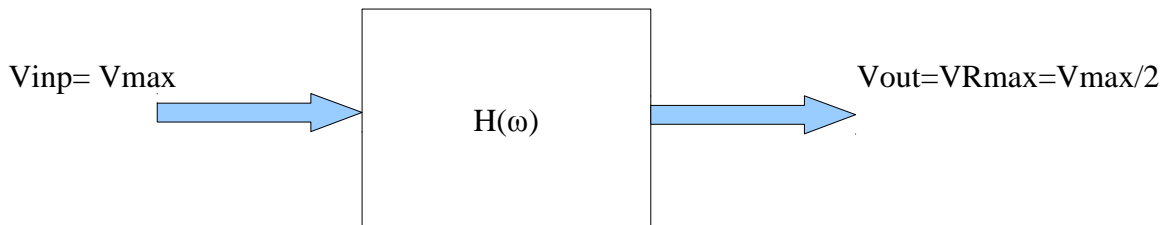
Si osservi il seguente schema:



con Nd=nodo differenziale (viene operata come vedremo la differenza aritmetica fra Vin e il segnale in arrivo sul ramo di reazione o di feedback).

Si osserva che in tale sistema l'uscita dipende dalla funzione di trasferimento dell'intero sistema composto da F e da G quest'ultimo posto sul ramo detto di reazione del sistema, ma non solo dipende anche dallo stato dell'uscita al momento t-1 precedente quello attuale.

risulta utile semplificare tale sistema con un singolo blocco di azione equivalente:



Risulta:

$$(V_{inp} - V_g) \dot{F} = V_{out}$$

con  $V_g = V_{out} \dot{G}$  perciò

$$(V_{inp} - V_{out} G) \dot{F} = V_{out} \implies V_{inp} F = V_{out} + V_{out} FG$$

$$H = \frac{V_{out}}{V_{inp}} = \frac{F}{(1 + FG)}$$

se il nodo invece che essere differenziale è sommativo (Ns al posto di Nd) allora si dimostra che

$$H = \frac{V_{out}}{V_{inp}} = \frac{F}{(1 - FG)}$$

nel caso in esame risulta:

$$H = \frac{V_{out}}{V_{inp}} = \frac{F}{(1 + FG)} = \frac{1}{2} \text{ o meglio } \frac{F}{(1 + FG)} = \frac{1}{2} \text{ da cui ricaviamo } G$$

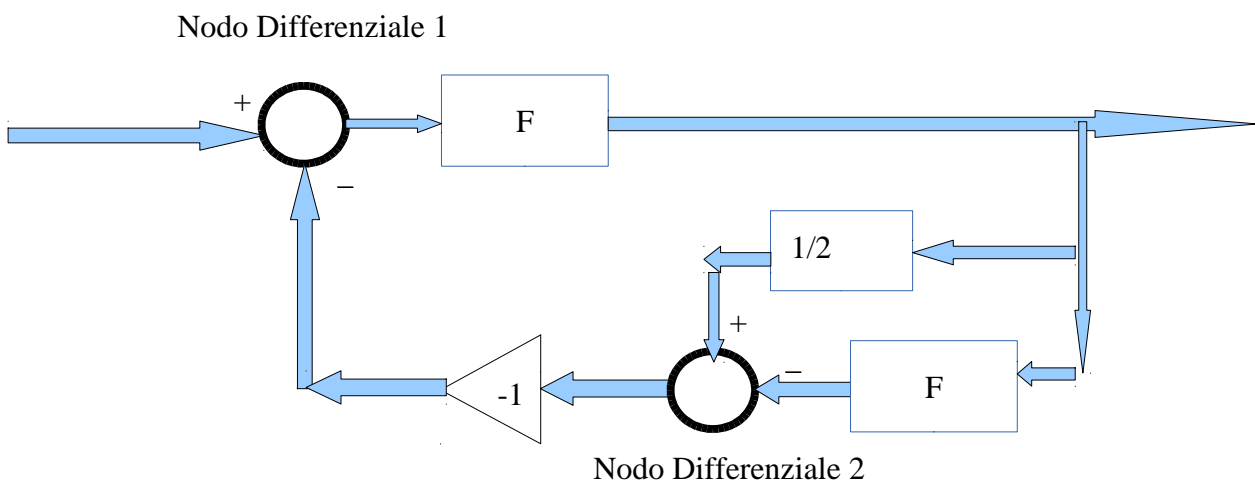
$$\frac{2}{(1 - 2F)} = G \text{ che sostituendo e risolvendo si ottiene}$$

$$G = 2 - \sqrt{\frac{1}{(\omega^2 C^2 R^2)} + 1}$$

è l'inverso della funzione di trasferimento dello stesso filtro F con le stesse resistenza e condensatore (vedi anche lo schema iniziale di questa lezione). Viene quindi l'idea (prima o poi) di andare a calcolare la funzione inversa 1/G che risulta

$$\frac{(1 - 2F)}{2} = \frac{1}{2} - F = \frac{1}{G}$$

che è una relazione algebrica più semplice della precedente perchè riporta F al numeratore e perciò la rende parte integrante di G (parte del circuito G è il circuito F .si provvederà in seguito ad invertire G con un Amplificatore Operazionale invertente) come si osserva nei seguenti schemi funzionali e circuitale del sistema regolato, la costante 1/2 è un partitore di tensione con uguali resistenze di partizione:

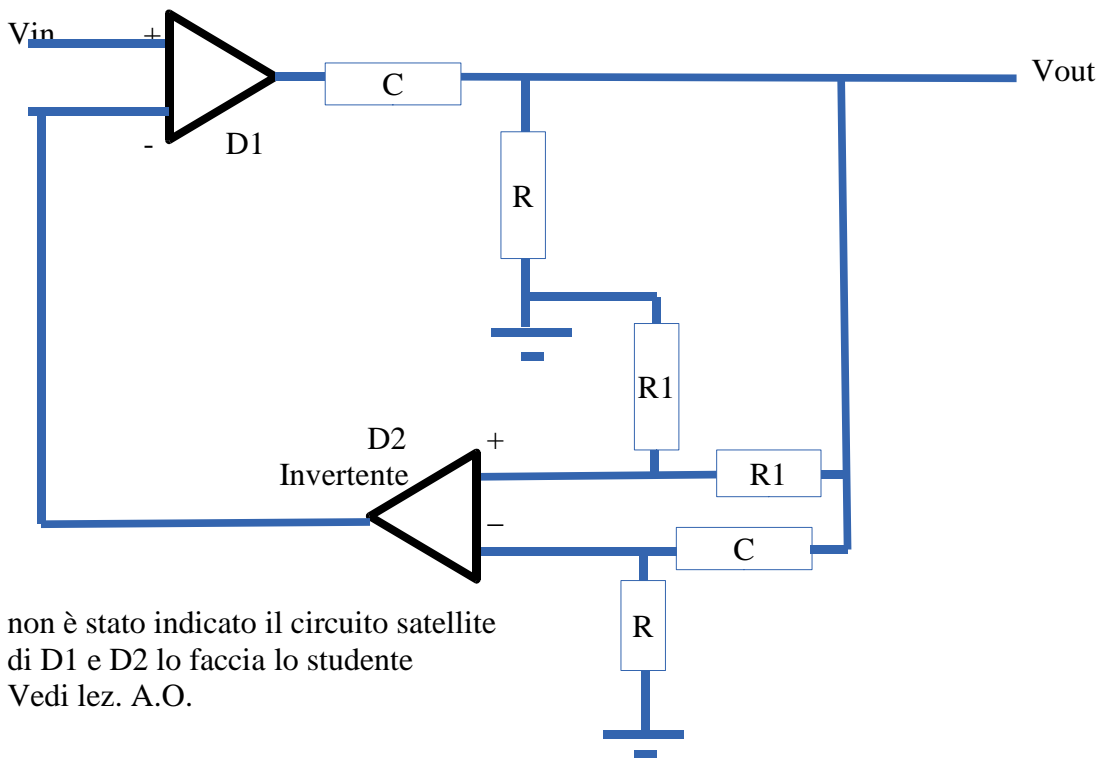


Il nodo differenziale sarà realizzato con A.O differenziali e l'inversione con un A.O invertente a guadagno unitario i due differenziali devono avere uguale guadagno in tensione.

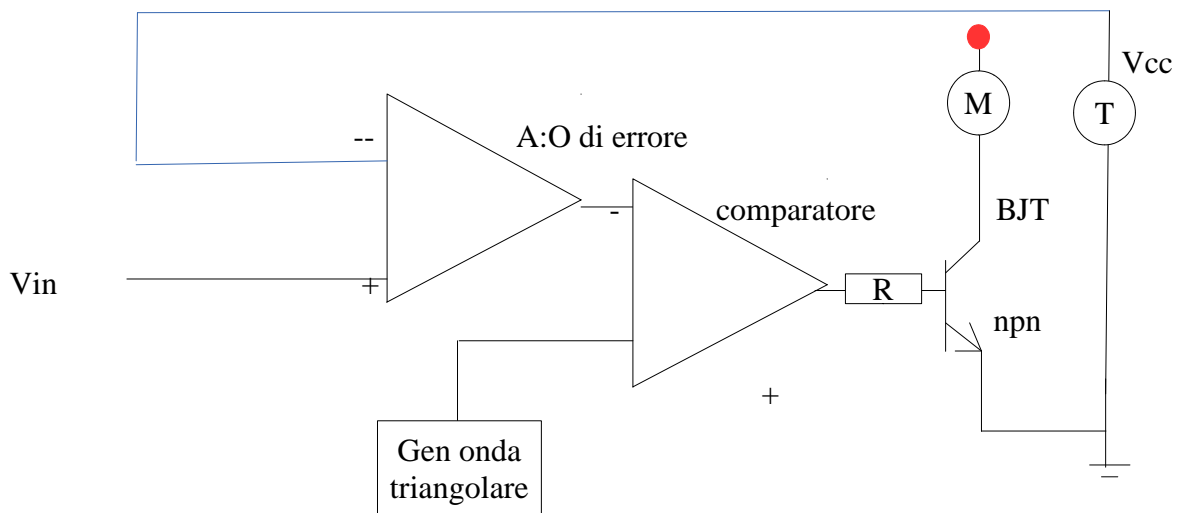
La banda di frequenza del funzionamento stabile (vedi seguito) del sistema deve essere compatibile con la banda passante degli amplificatori operazionali impiegati per realizzare il circuito.

si osserva un ulteriore nodo differenziale e un blocco costituito da una funzione di trasferimento costante e in particolare maggiore o uguale a 1 tale funzione di trasferimento è esclusiva di sistemi attivi vale a dire alimentati esternamente. Questo scopo sia di fornire fdt >1 che di eseguire differenze e somme è svolto da quadripoli attivi chiamati amplificatori operazionali, costituiti da circuiti complessi i cui componenti fondamentali sono i transistor, in tale macchina utilizzati come elevatori di segnali analogici e non in genere come interruttori comandati come avviene in campo digitale.

Lo schema circuitale è il seguente: si faccia riferimento anche alla lezione Amplificatori Operazionali.



Regolazione PWM ad anello chiuso



## 5. Trasformate di Laplace e Diagrammi di Bode (introduzione allo studio dei segnali nel Dominio della frequenza)

Analizziamo il sistema con una tecnica fondamentale chiamata delle trasformate di Laplace, che permette di tracciare i diagrammi di Bode di Ampiezza e fase del rapporto fra segnale in uscita e segnale in ingresso ( $G_v =$  Guadagno in tensione ad un sistema comunque complesso. Questo metodo porta all'analisi della stabilità del sistema stesso (vedi seguito) ed intervenire per regolarlo e soprattutto stabilizzarlo. Consideriamo la seguente equazione integro differenziale non omogenea del secondo ordine.

$$V_{gen}(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

si opera una sostituzione della variabile  $t$  con la variabile  $s = j\omega$  in un modo che qui eseguiamo brutalmente ma che può essere dimostrato con tale sostituzione di variabile si ottiene:

$$V_{gen}(s) = Ri(s) + Lsi(s) + \frac{1}{Cs} i(s)$$

si opera la sostituzione alla derivazione  $d/dt = s$  e  $\int dt = \frac{1}{s}$  e una costante  $R$  resta  $R$  senza alcuna variazione. e si osserva che l'equazione integro differenziale nel dominio del tempo ora si è trasformata in una funzione lineare fratta nel dominio della frequenza complessa  $s$  e risolvibile sicuramente in modo semplice.

Per semplicità consideriamo un filtro RC passivo:

Riscriviamo l'equazione risolutiva in funzione del tempo

$$V_C(t) = \frac{1}{C} \int I(t) dt$$

$$V_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$V_{gen}(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int I(t) dt \quad \text{con} \quad V_{gen}(t) = \vec{Z} i(t) \quad \text{e} \quad \vec{Z}(s) = R + \frac{1}{Cs}$$

si opera una sostituzione della variabile  $t$  con la variabile  $s = j\omega$  e si fissa l'obiettivo in uscita: se è un filtro passa basso vorremmo la  $V_C$  in uscita quindi:

$$V_{gen}(s) = \frac{RV_{gen}}{\vec{Z}(s)} + V_C(s)$$

tenendo presente che  $V_{out} = V_C$  e  $V_{in} = V_{gen}$  la funzione di trasferimento del sistema è la seguente:

$$F(s) = \frac{V_{out}}{V_{inp}} \quad \text{si ottiene così:} \quad V_{gen}(s) - \frac{RV_{gen}}{\vec{Z}(s)} = V_C(s) \quad \text{e esplicitando}$$

$$F(s) = 1 - \frac{R}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{\left(\left(R + \frac{1}{Cs}\right) - R\right)}{\left(R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{1}{(RCs + 1)} \quad \text{il valore assoluto di } s \text{ che azzerava il denominatore}$$

è chiamato POLO. (ZERO quello che annulla il numeratore: in questo caso la funzione di trasferimento non ha zeri).

Poniamo  $RC = \tau$  [s] (questo oltre che essere valore di interesse per il calcolo del polo è detta costante di carica del condensatore tale che la carica completa avviene in un tempo generalmente pari a  $2,5 \tau$  [s];

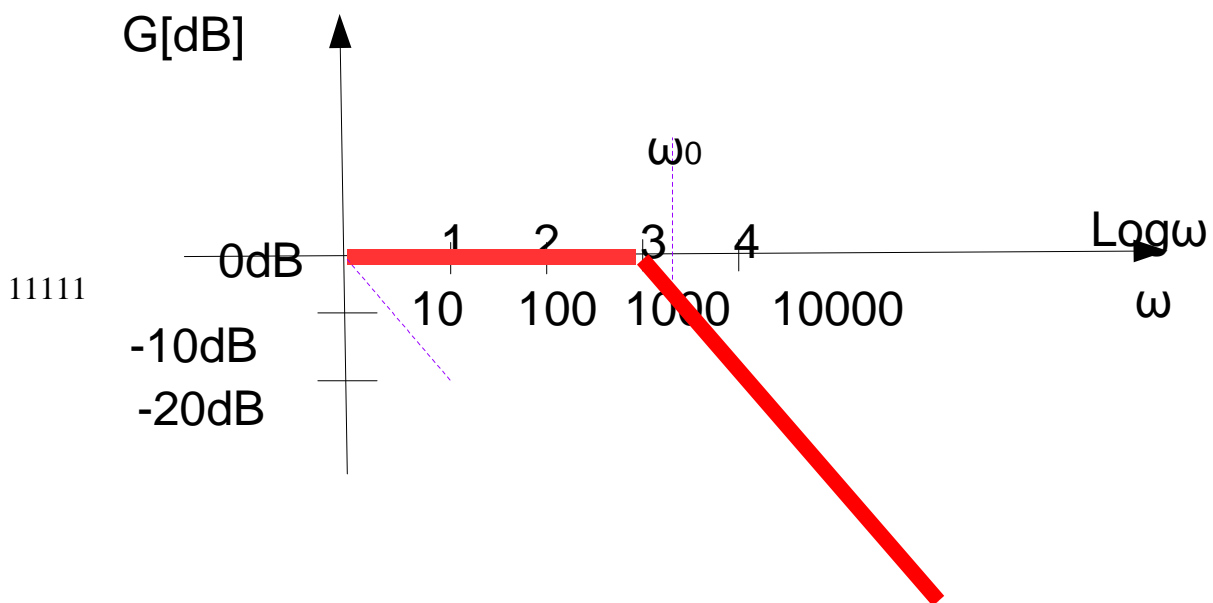
comunque la nota

$$F(s) = 1 \frac{i}{(\tau s + 1)} \quad \text{in generale} \quad F(s) = A \frac{i}{(\tau s + 1)}$$

il polo è in  $s = -\frac{1}{\tau}$  e  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  questa si chiama pulsazione di taglio

In ordinate sul diagramma di Bode si riporta il guadagno del sistema espresso in decibel (dB) così definito:

$$G[dB] = 20 \log(F(s))$$



con  $F(s) = \frac{V_{out}}{V_{inp}}$  in ascisse si riporta il  $\text{Log } \omega$

diagramma di Bode del sistema analizzato è il seguente (la pulsazione di taglio è fissata indicativamente sulla scala del diagramma):

l'intervallo fra  $\text{Log } \omega = 1$  e  $\text{Log } \omega = 2$  e così fra 2 e 3 ecc si chiama DECADE il valore che assume la funzione di Dobe in  $\text{Log } \omega = -\infty$  è  $20 \text{Log } |A|$  in corrispondenza della frequenza di taglio il valore del guadagno si riduce di 3 dB rispetto al valore iniziale, la pendenza della retta è 20 dB per decade verso il basso se si è in corrispondenza di un polo e verso l'alto se uno zero, la frequenza di taglio di questo filtro passa basso è

$$f_t = \frac{1}{(2\pi RC)}$$

per il diagramma delle fasi si ricorda che  $\text{artg } b/a = \text{fi}$

quindi per  $20 \log \omega$  tendente a meno infinito la fase è  $-\text{pigrco}/2$  e  $+\text{pigrco}/2$  per  $\omega$  tendente a + infinito la fase è  $45^\circ$  in corrispondenza della pulsazione di taglio sempre di 20 dB per decade di pendenza.

Il diagramma delle fasi verrà svolto in seguito.

Abbiamo visto funzioni oscillatorie convergenti divergenti o limitate a seconda della funzione ampiezza nel dominio del tempo.

**Se consideriamo la**

$F(s) = A \frac{1}{(\tau s + 1)}$  **risolvendo normalmente il denominatore in s la funzione è stabile se il polo reale o complesso che sia abbia in generale parte reale negativa. Se il polo ha parte reale positiva è instabile se è 0 è limitata.**

## 6. Transistor (cenni) e Amplificatori operazionali

Il transistor è un componente elettronico detto quadripolo attivo, che abbisogna cioè di alimentazione esterna per entrare in funzione.

Si devono distinguere intanto le due famiglie logiche principali (filieri costruttive del componente) di realizzazione di transistor a semiconduttori: La famiglia TTL da cui si ricavano i transistor con acronimo BJT (Bipolar Junction Transistor) e la famiglia FET e MOS-FET da cui si ricavano i transistor di tipo MOS (Metal Oxide Semiconductor).

Altra distinzione è data dal tipo di utilizzo dei transistor; in via del tutto generale i transistor si utilizzano:

1. per realizzare circuiti detti di condizionamento del segnale cioè di manipolazione del segnale elettrico in modo da ottimizzarne l'acquisizione in un sistema digitale programmabile o per levare la potenza di segnali analogici ( segnali periodici più o meno complessi audio video).
2. Per realizzare circuiti elettronici digitali (realizzazione delle porte logiche) ed in questo caso il transistor funziona in configurazione detta di interruttore comandato elettricamente.

Si deve precisare che il calcolatore elettronico programmabile è un sistema misto in cui cioè vi sono parti dedicate al condizionamento del segnale analogico mediante amplificatori filtri e altri componenti che trattano il segnale analogico e parti prettamente digitali; esiste quindi un componente di frontiera fra la parte analogica e quella prettamente digitale del sistema sia in fase di acquisizione del dato che in fase di distribuzione detto componente è in acquisizione si chiama ADC (Analogic to Digital Converter) e in distribuzione detto DAC (Digital to Analogic Converter). Le due tipologie di transistor hanno delle caratteristiche tali da rendere gli uni preferibili agli altri e viceversa per quanto riguarda il loro campo applicativo, di seguito quindi riassumiamo le caratteristiche più importanti dei due tipi di transistor citati.

CMOS: bassa velocità di commutazione a livello dinamico (passaggio da livello alto a basso e viceversa)

Potenza dissipata in condizioni statiche uguale a 0 (se deve restare a livello alto o basso non serve potenza) .

Ottima integrabilità (miniaturizzazione)

Tensione di alimentazione variabile dai 5 agli attuali 1.7, 0,8 V

BJT: Alta velocità di commutazione a livello dinamico (passaggio da livello alto a basso e viceversa)

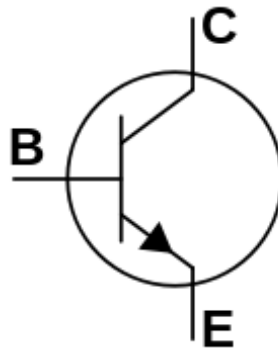
Potenza dissipata in condizioni statiche e dinamiche sempre diversa da 0 (se deve restare a livello alto o basso serve potenza) .

Discreta integrabilità.

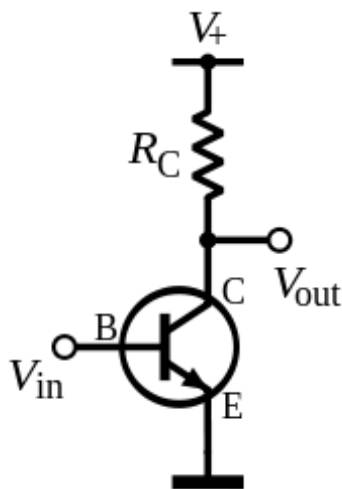
Tensione di alimentazione rigida 5 V -9 -12 V

Queste caratteristiche fanno preferire i transistor BJT per applicazioni analogiche di potenza e per applicazioni digitali di elevate velocità e prestazioni e i CMOS per lo più per realizzare circuiti digitali ad alta scala di integrazione in configurazione di interruttori comandati e per realizzazioni in radio frequenza.

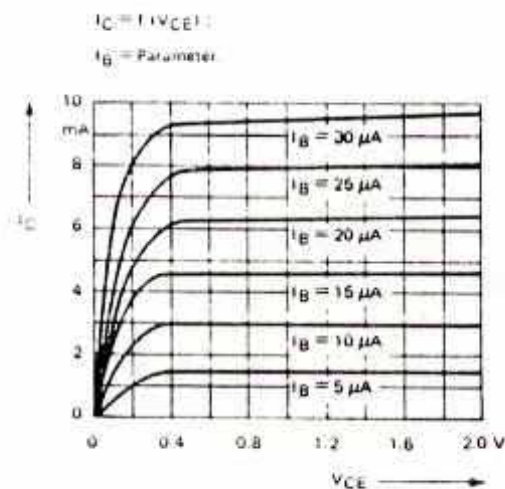
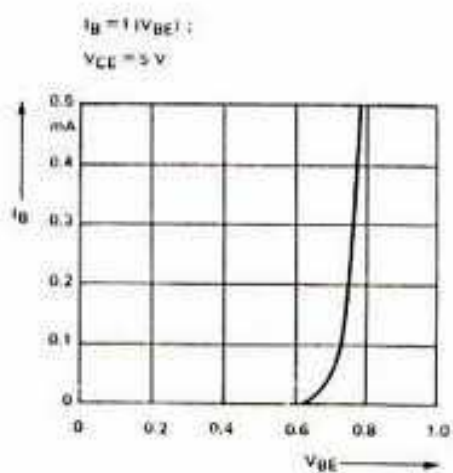
BJT Transistor n-p-n



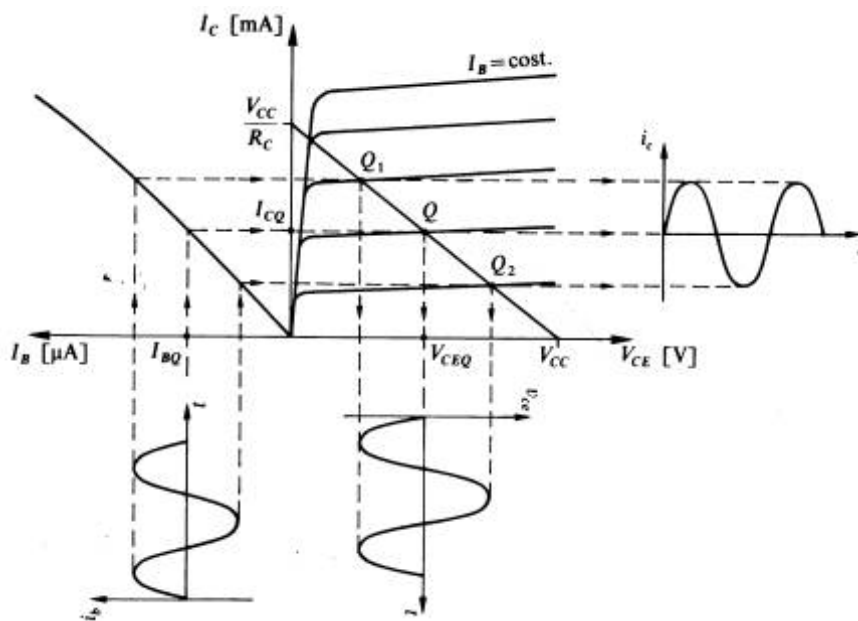
La configurazione di base per comprendere il funzionamento del transistor bipolare è quella detta emettitore in comune:



E= emettitore B= base C= collettore le tensioni  $V_{xx}$  indicate di seguito nelle curve caratteristiche interna ed esterna del BJT sono quelle misurate ai capi di CE collettore emettitore per es. Questa configurazione è fondamentale sia per la realizzazione di circuiti digitali normalmente lavorando in regime di saturazione che per circuiti di condizionamento del segnale facendo lavorare il transistor in condizioni lineari di amplificazione

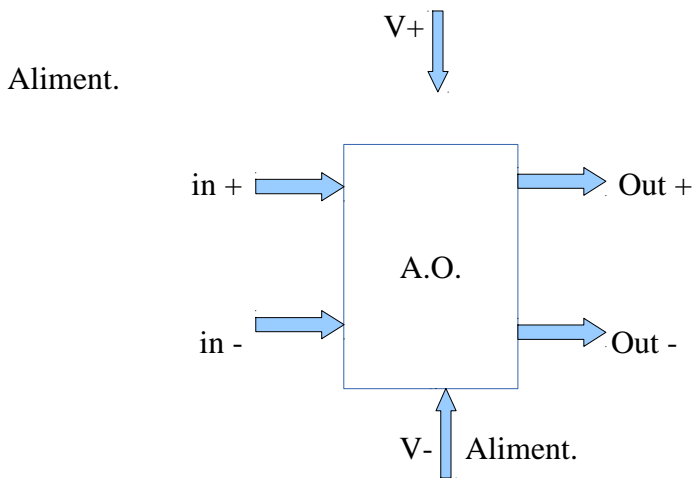


I punto di lavoro del Transistor considerato nella conf. Emittitore comune è dato per via grafica dal seguente punto di lavoro



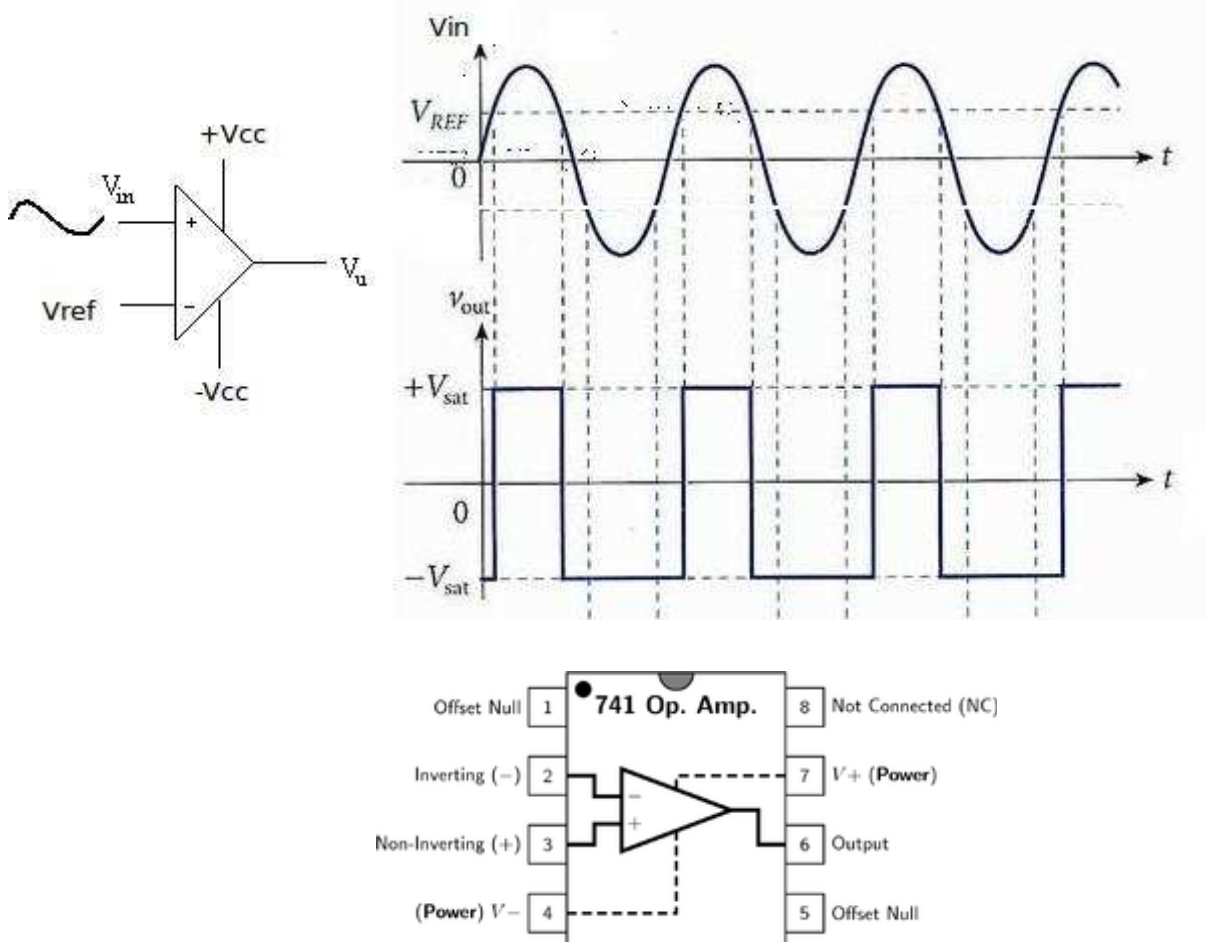
In via sommaria si può considerare che il transistor in zona lineare si può considerare come una resistenza variabile in campo proporzionale perciò. In zona di saturazione è come se collettore ed emettitore fossero in corto e variazioni della corrente di base non determinano variazioni della tensione di uscita.

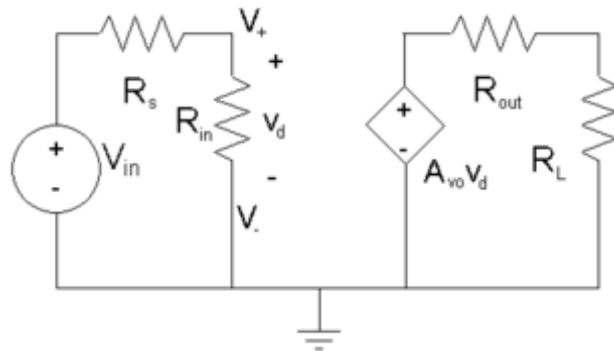
Di seguito lo schema funzionale che verrà utilizzato anche per analizzare i quadripoli attivi.



Gli Amplificatori operazionali sono circuiti complessi di transistor accoppiati a cascata la cui configurazione di base è quella di operazionale differenziale ad anello aperto (gli A.O servono per realizzare operazioni aritmetiche fra segnali analogici (in generale si consideri un sinusoidale per es)).

Il simbolo schematico è il seguente:





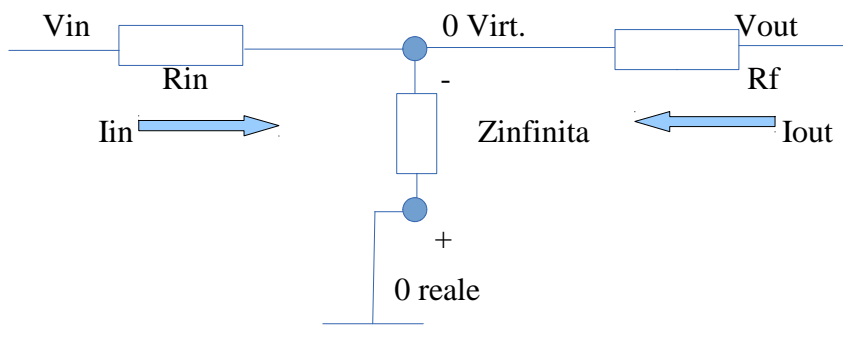
In condizioni ideali un A.O ha  $Z_{in} = \infty$ ,  $Z_{out} = 0$ ,  $A_v = \infty$ ,  $BW = \infty$

In tali condizioni il LM741uA come da data sheet presenta ad anello aperto guadagno  $G = 100000$

$BW = 6\text{Hz}$   $BWG = 600.000$  che è una costante per l'amplificatore considerato. P.es se si fissa  $G = 2$  risulta per il 741 intrinsecamente  $BW = 300.000\text{ Hz}$

Il circuito amplificatore ideale ad anello aperto schematizzato nella figura precedente mette in risalto che l'uscita non è collegata agli ingressi. Tale collegamento viene effettuato con la retroazione per es del circuito successivo. Il chip amplificatore operazionale lm 741 per acquisisce le caratteristiche di guadagno e di conseguenza di  $BW$  massima mediante il calcolo del  $GBW$  e con il cablaggio della circuiteria satellite del A.O.

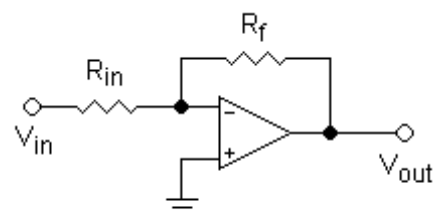
Ad anello chiuso il sistema deve essere studiato come si studierebbe un bipolo passivo, con il metodo dei corto circuito virtuale di seguito riportato per l'A.O invertente.



risulta per Kirchhoff al nodo 0 virt.

$I_{in} + I_{out} = 0$  (entrambe le correnti entranti nel nodo)

con



$$I_{in} = V_{in} / R_{in}$$

$$I_{out} = V_{out} / R_f$$

mettendo a sistema le tre equazioni scritte si ottiene

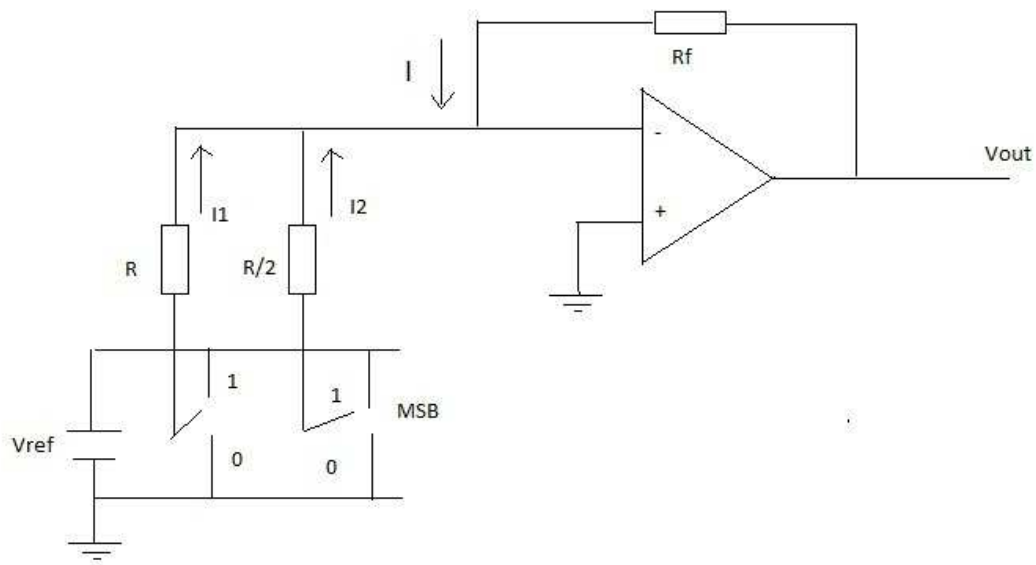
$$V_{out} / V_{in} = G_v = - R_f / R_i$$

l'inversione riguarda la fase del segnale in uscita che è opposta rispetto al segnale in ingresso

es.1

Convertitore DAC R-2R

$$S_i = 1, 2$$



$$\{ I_1 = V_{ref} / R \quad I_2 = (2 V_{ref}) / R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = V_{ref} / R \\ I_2 = 2 I_1 \end{array} \right.$$

$$I_1 + I_2 = I$$

$$(V_{out} - 0) / R_f = I$$

$$(V_{out}) / R_f = I_1 + I_2$$

$$V_{out} / R_f = (V_{ref} / R) + (2 V_{ref} / R)$$

$$V_{out} = ((V_{ref} / R) + (2 V_{ref} / R)) R_f$$

$$V_{out} = - ( S_0 ( V_{ref} / R ) + S_1 ( 2V_{ref}/R ) ) R_f$$

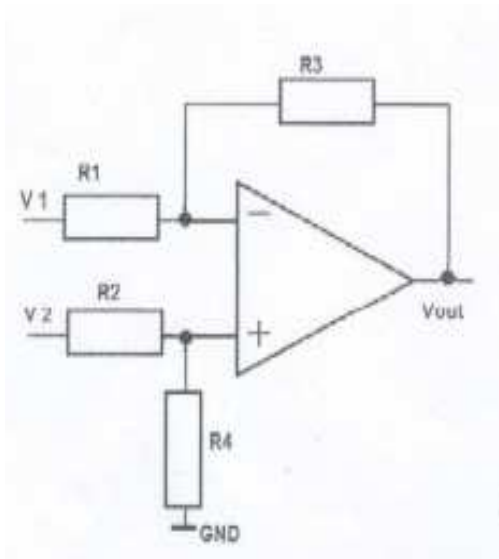
$$V_{out} = - ( V_{ref} / R ) R_f ( S_0 1 + S_1 2 )$$

$$V_{out} = - ( V_{ref} / R ) R_f ( S_0 2^0 + S_1 2^1 )$$

$$V_{out} = - ( V_{ref} / R ) R_f ( S_n 2^n + \dots S_0 2^0 )$$

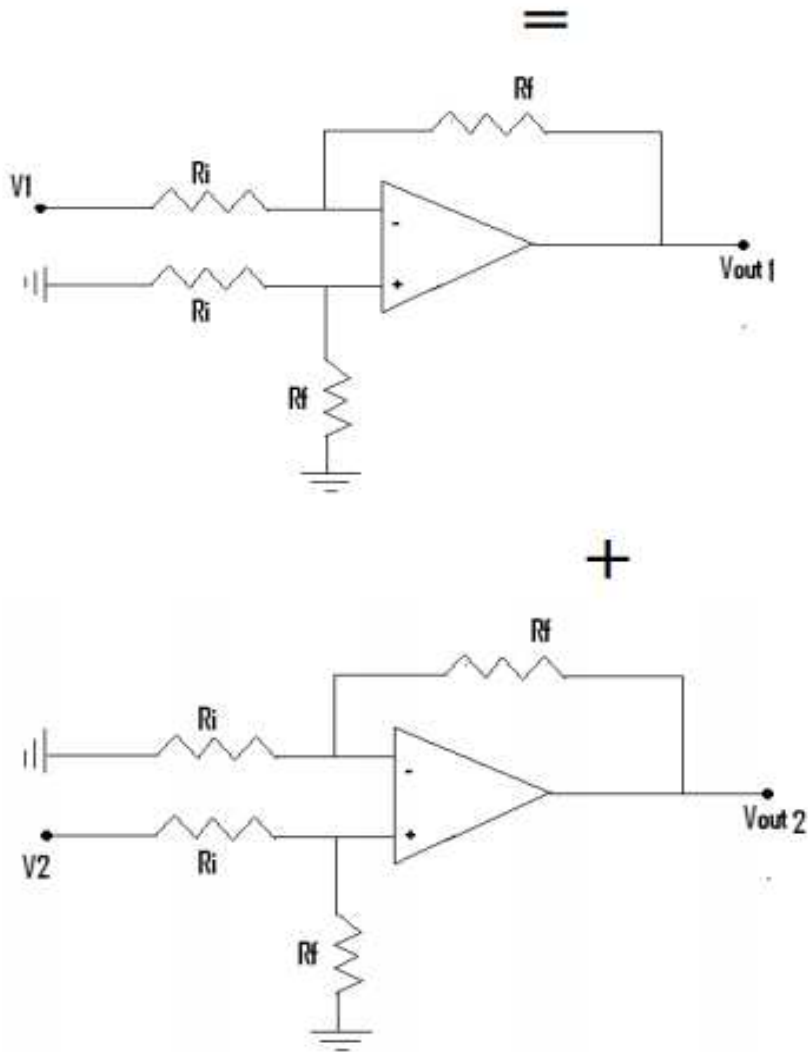
es.2

esercizio 1 : risolvere il seguente circuito e calcolare Gv



soluzione

applichiamo il principio della sovrapposizione degli effetti



$$V_+ = (V_2) * (R_f / R_i + R_f)$$

$$(V_+ / R_i) - (V_{out2} - V_+ / R_f) = 0$$

$$(V_+ / R_i) - (V_{out2} / R_f) + (V_+ / R_f) = 0$$

$$(V_{out2} / R_f) = (V_+ / R_i) + (V_+ / R_f)$$

$$I_1 - I_2 = 0$$

$$I_1 = V_+ / R_i$$

$$I_2 = (V_{out2} - V_+) / R_f$$

$$V_{out2}/R_f = (V_+/R_1) + (V_+/R_f)$$

$$V_{out2}/R_f = V_+ * (1/R_1 + 1/R_f)$$

$$V_{out2} = V_+ * (1 + R_f/R_1) * R_f$$

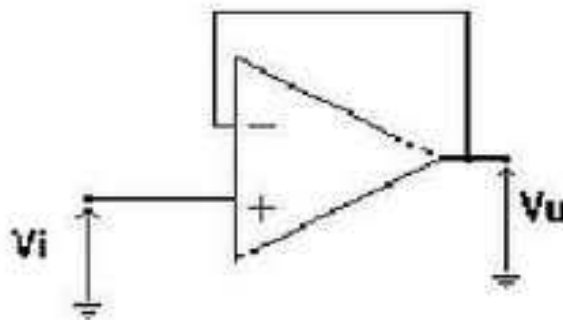
$$V_{out} = V_{out1} + V_{out2}$$

$$V_{out} = V_1 * (R_f/R_i)$$

$$V_{out} = -V_1 * (R_f/R_i) + V_2 (R_f/(R_i + R_f)) * (1 + R_f/R_i)$$

$$V_{out} = (R_f/R_i) * (V_2 - V_1)$$

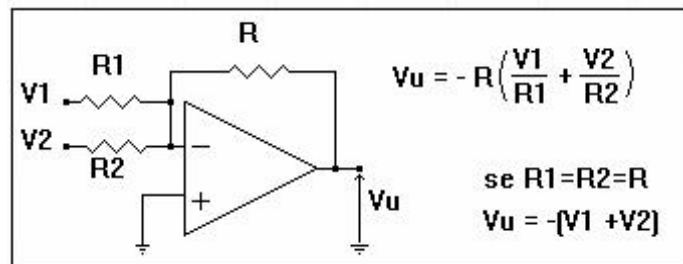
esercizio 3  
calcolare  $G_v$  (dB) con  
il metodo del CC  
Virtuale



si ricava  $G_v = 1$

il precedente è detto rigeneratore di segnale o Buffer inseguitore: qualsiasi sia la resistenza sulla linea non invertente l'amplificatore è trascurabile in quanto la stessa è posta in serie alla  $R$  di ingresso del A.O che è infinita.

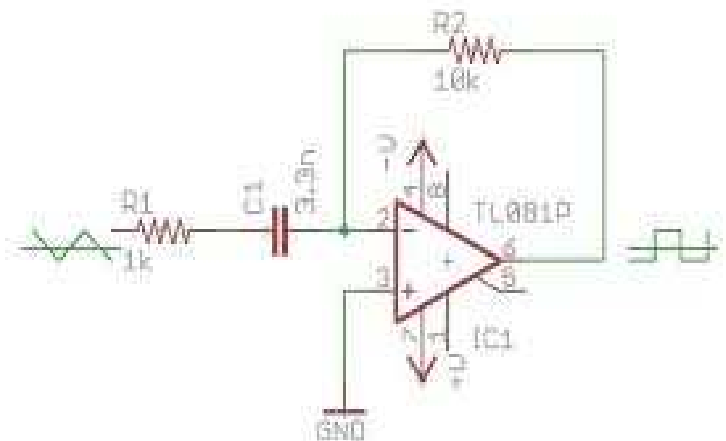
Sommatore invertente



dimostrare con il metodo del CCV

Derivatore reale

oltre che per generare in output segnali che sono la funzione derivata dei segnali di ingresso il circuito derivatore può essere utilizzato come filtro passa alto attivo con guadagno per pulsazione tendente all'infinito  
 $G_v = -R_f/R_i$



e pulsazione di taglio

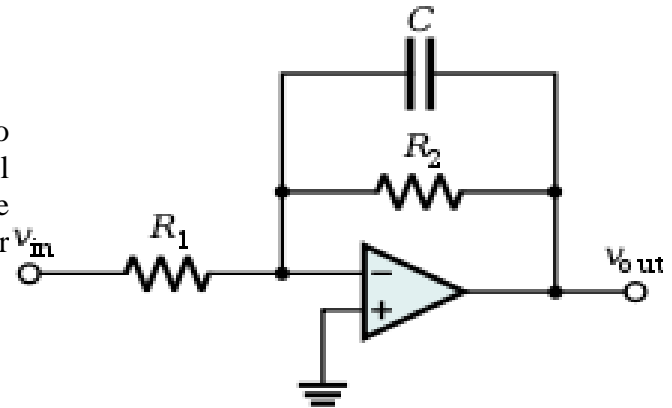
$$\omega_t = \frac{1}{R_1 C}$$

Integratore reale

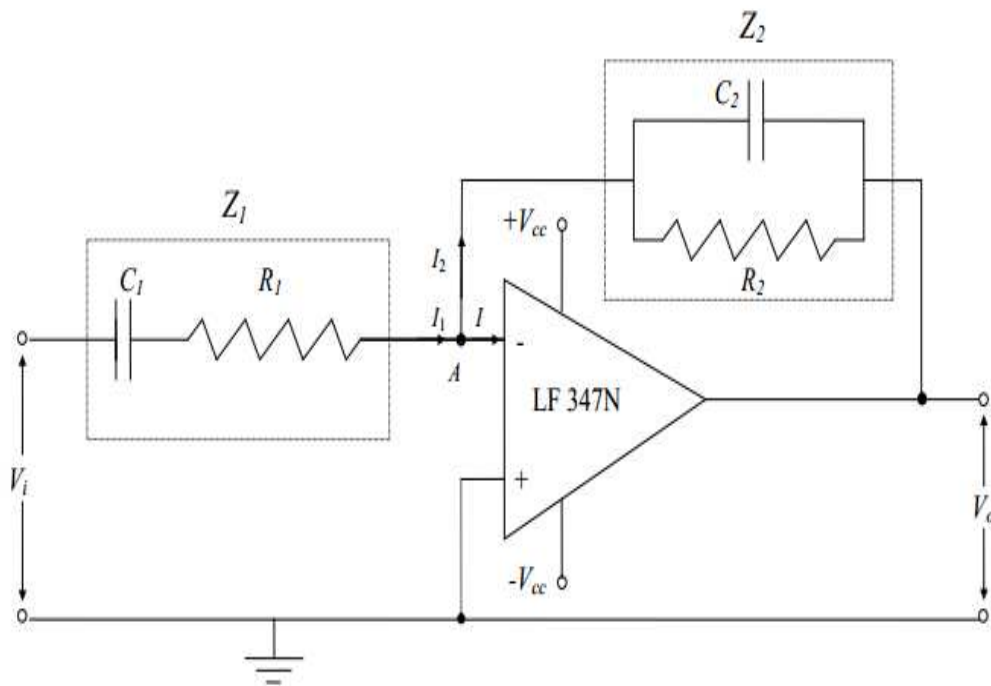
oltre che per generare in output segnali che sono la funzione primitiva dei segnali di ingresso il circuito integratore può essere utilizzato come filtro passa basso attivo con guadagno per pulsazione tendente a 0  $G_v = -R_f/R_i$

e pulsazione di taglio

$$\omega_t = \frac{1}{R_2 C}$$



Filtro Passa banda



analizziamo il circuito con il metodo del CCV ponendo attenzione in quanto approssimeremo la variabile complessa  $s=j\omega$

$$\vec{Z}_1 = R_1 - \frac{J}{\omega C_1}$$

$$\vec{Z}_2 = R_1 - \frac{J}{\omega C_1} \frac{J}{J} = R_1 - \frac{-1}{J \omega C_1} = R_1 + \frac{1}{J \omega C_1} = R_1 + \frac{1}{s C_1}$$

per il calcolo dell'impedenza sul ramo di reazione si ricorda la formula della resistenza equivalente parallelo

$$R_{eq} = \frac{R_1 * R_2}{(R_1 + R_2)}$$

perciò

$$\vec{Z}_2 = \frac{R_2 \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1}$$

si può a questo punto applicare il metodo del CCV e calcolare la funzione di trasferimento  $G_v$  del sistema oppure considerando le impedenze delle R anche in virtù della legge di Ohm generalizzata così lo A.O di figura può essere considerato un invertente resistivo quindi con

$$G_v = - \frac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_1} = \frac{R_2}{sR_2C_2 + 1} \frac{1}{R_1 + \frac{1}{sC_1}}$$

$$G_v = \frac{-1}{R_1C_2} \frac{s}{(s + \frac{1}{R_1C_1})(s + \frac{1}{R_2C_2})}$$

il valore di  $s$  che annulla il numeratore si dice ZERO mentre il valore di  $s$  che annulla il denominatore si dice POLO

calcolo degli ZERI:

$$z_1 = 0$$

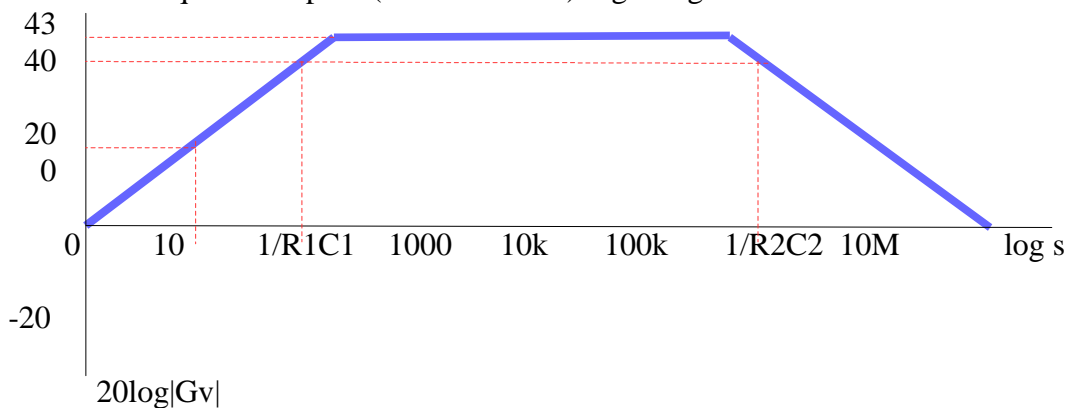
calcolo dei POLI

$$p_1 = \frac{-1}{R_1C_1}$$

$$p_2 = \frac{-1}{R_2C_2}$$

rivedendo la costruzione del diagramma di Bode a pag.30 si ottiene il seguente grafico della  $G_v$  in funzione di  $s$  (pulsazione complessa):

lo zero  $z_0$  determina una pendenza opposta (+20dB /decade di pulsazione complessa) del diagramma di B a quella del polo (-20dB /decade) il guadagno è indicato arbitrariamente in scala



il diagramma delle fasi è qualitativamente come quello della figura seguente che è relativa alla banda sonora

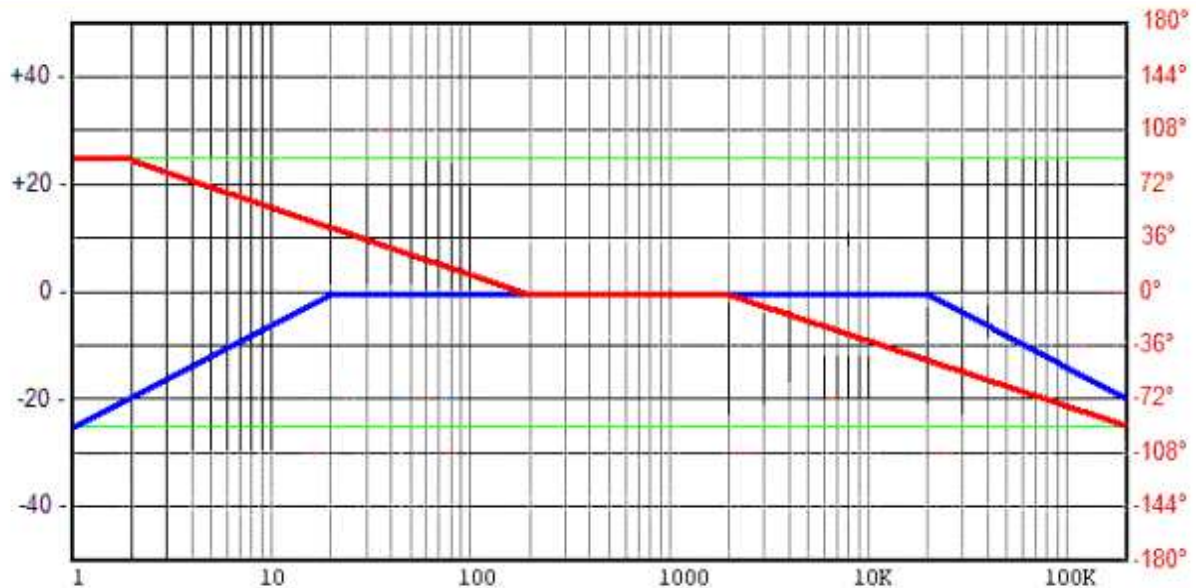
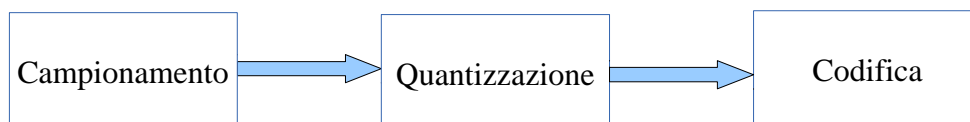


Diagramma di Bode per Fase (rosso) e Ampiezza (blu) di un sistema a fase minima con banda passante limitata da 20 a 20kHz. La risposta in frequenza mostra un Passa Alto e un Passa Basso del primo ordine (20 dB/decade). La fase a 20 e 20kHz vale rispettivamente  $+45^\circ$  e  $-45^\circ$ . La variazione di fase si estende per una decade prima e dopo la frequenza di taglio. Questo sistema è "invariante in forma" solo per segnali il cui spettro è limitato tra 200 e 2000 Hz.

Ne segue che un amplificatore, per non introdurre variazioni di fase nella banda audio 20-20kHz deve possedere una risposta lineare da 2 a 200kHz (anche se la risposta in frequenza per grandi segnali non deve essere così estesa).

## 7. Campionamento circuiti di sample hold (S/H) e convertitori AD (analogico-digitale) e DA (Digitale-Analogico)

La “Catena di conversione Analogico Digitale” ADC è costituita da tre blocchi funzionali costituito come sappiamo dal circuito elettronico che svolge la funzione assegnata:



Consideriamo un segnale periodico  $f(t)$  comunque complesso e scomponibile in base al teorema di Fourier in una serie di infinite armoniche sinusoidali e cosinusoidali ciascuna di ampiezza assegnata dalle soluzioni integrali  $C_n$  (ampiezze delle armoniche cosinusoidali) e  $B_n$  (ampiezze delle armoniche sinusoidali) chiamate in generale coefficienti  $\gamma_n$  della serie di Fourier in cui tale funzione  $f(t)$  può essere espressa (vedi pars. Tre rappresentazioni dei vettori e teorema di Fourier) in forma complessa come segue:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{Jn\omega t} \quad \text{con } n \text{ intero relativo}$$

di cui ricordo la fase è 0 e che deve essere utilizzata la rappresentazione complessa del vettore statico per poi passare a quella di uno rotante con pulsazione in rad/s e considerare  $f(t)$  come composta da un segnale che è la sovrapposizione degli effetti di un numero infinito di vettori rotanti in un o nell'altro con funzione pari o dispari cioè rispettivamente cosinusoidale o sinusoidale con la pulsazione multipla intera ( $n$  intero relativo) della pulsazione del vettore rotante fondamentale  $\omega_0$  (lo stesso avente ampiezza  $\gamma_0$  che rappresenta il valor medio integrale dell'ampiezza di  $f(t)$  nel periodo  $T$ : Rif Par Teorema di Fourier componente continua  $f_m$ ) ognuno con ampiezza  $\gamma_n$  sempre meno importante con il crescere di  $n$ . Se  $f(t)$  è di tipo sinusoidale allora i termini di ampiezza  $C_n$  si annullano altrimenti se è di tipo sinusoidale il contrario i termini  $B_n$  si annullano. es. Di suppone di acquisire il segnale trasdotto da un microfono relativo ad un musicista che suona il suo strumento musicale o un raggio di luce bianca che si scompone mediante il prisma di Newton (in modo ideale il prisma rappresenta la scomposizione attuata dal teorema di Fourier) in un fascio di raggi che assumono le frequenze e perciò il colore dal rosso al violetto della banda visibile. Vedi anche

[http://it.wikipedia.org/wiki/Serie\\_di\\_Fourier](http://it.wikipedia.org/wiki/Serie_di_Fourier)

<http://www.dizionarioinformatico.com/allegati/fourier/Fourier1.htm>

[http://fisicaonemusica.unimore.it/Teorema\\_di\\_Fourier.html](http://fisicaonemusica.unimore.it/Teorema_di_Fourier.html)

## 7.1 Sample-Hold

Dal punto di vista operativo il segnale  $f(t)$  potrà essere già stato filtrato in frequenza a monte cioè prima di essere campionato e cioè presentarsi all'ingresso del campionamento, al limite come costituito da un solo segnale traslato in ampiezza di una componente continua uguale o maggiore dell'ampiezza massima del segnale bipolare e cioè  $f(t) = A_{max} \sin(\omega t) + A_{max}$  acquisito a valle del filtro passa banda e del traslatore idealmente interposti fra la linea del segnale complesso trasdotto dal microfono, e l'ingresso al campionatore.

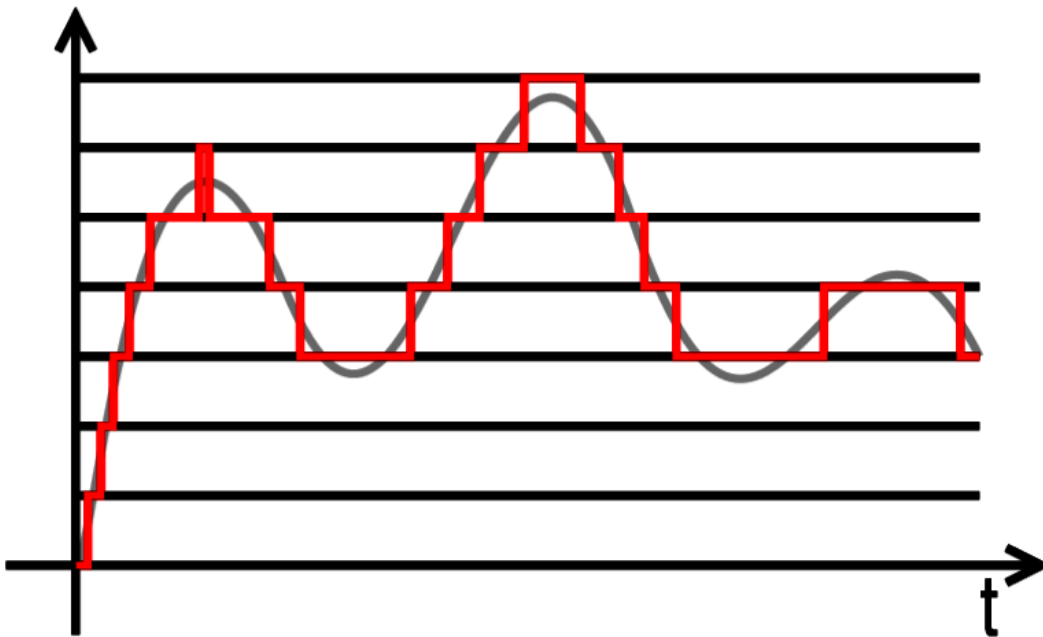


Fig.1 segnale traslato sul semiasse positivo delle tensioni  $V_{FS} = V_{max}$   $V_{ref}$  = ampiezza di ogni intervallo sulle ordinate e campionato con  $t_{camp}$  variabile.

L'intervallo fra un livello e il successivo sull'asse dell'ampiezze (ordinate) è definito come  $V_{ref}$  o valore di quantizzazione in quanto è il valore che corrisponde alla variazione del bit meno significativo della quantizzazione in  $n$  bit (nel caso del grafico  $n$  bit = 3 del ADC).

Gli step temporali con cui ogni valore analogico del segnale viene acquisito per essere poi convertito e quindi occupare i circuiti del convertitore per un tempo chiamato tempo di conversione indicato con  $t_{conv}$  (comunemente compreso fra 20 ms e 1 ns attualmente a meno), devono tenere appunto conto e del tempo di conversione ora definito ma anche della velocità di variazione massima del segnale entro il periodo, che deve essere il più uguale e inferiore alla  $V_{ref}/t_{conv}$  = velocità del convertitore per compiere l'intervallo  $V_{ref}$  in un tempo di conversione.

Quindi

$$v_{max} = \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{max} = f'(t)_{max} \leq \frac{V_{ref}}{t_{conv}}$$

d'altronde

$$v_{max} = \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{max} = A_{Max} \omega = V_{FS} \omega$$

L'intervallo di tensione che viene compiuto dal segnale durante il tempo di campionamento utilizzato (dato di progetto o di verifica a seconda del problema) è

$$\Delta V_{Max} = v_{max} t_{conv} = V_{FS} 2\pi f t_{conv} \leq V_{ref}$$

tale disuguaglianza permette di valutare se un circuito di conversione analogico digitale o digitale analogico ADC o DAC necessita di un circuito S/H o meno in funzione della Vref scelta (in funzione del n° bit), inoltre infatti ricordando la formula di quantizzazione che definisce gli intervalli sulle ordinate

$$V_{Ref} = \frac{V_{FS}}{2^{nbit}}$$

si ottiene

$$\Delta V_{Max} = v_{max} t_{conv} = V_{ref} 2^{nbit} 2\pi f t_{conv} \leq V_{ref} \quad \text{eqz.1}$$

$$2^{nbit} 2\pi f t_{conv} \leq 1 \quad \text{eqz 2}$$

se questa disequazione è soddisfatta la Vref scelta è tale da non necessitare di un S/H altrimenti dovrà essere interposto.

Possiamo infine ultimare trovare la frequenza di campionamento massima eseguibile senza la necessità di utilizzare il S/H infatti:  
che risulta

durante il  $t_{camp}$  che come vedremo dovrà essere scelto in funzione della frequenza  $f$  del segnale da campionare, per soddisfare il teorema di SHANNON (vedi seguito)  
l'intervallo di ampiezza sulle ordinate compiuto è

$$f \leq \frac{1}{2\pi t_{conv} 2^{nbit}} \quad \text{eqz 3}$$

le eqz 1 2 e 3 sono equivalenti come si può osservare;

N.B: se la frequenza del segnale da campionare (tenendo conto del teorema di Shannon che segue) è inferiore al valore calcolato non c'è bisogno di sample Hold altrimenti sì.

Svolgere es pg. 262 del vol 3 del vs libro di testo.

## 7.2 Teorema di Shannon

Il tempo di campionamento deve essere scelto in modo da soddisfare il teorema di Shannon che enuncia La frequenza di campionamento deve essere maggiore o uguale al doppio della frequenza dell'armonica più elevata del segnale da campionare.

Quindi

$$f_{camp} \geq 2f \quad \text{con } f \text{ frequenza dell'armonica più elevata del segnale da campionare}$$

P.S

ovviamente non potendo considerare tutte le armoniche del segnale dovrà essere interrotta la serie di fourier in genere alla 13° armonica.

Per quanto riguarda i circuiti di S/H ricordo i seguenti: N.B la capacità dei condensatori dei circuiti di S/H tiene conto di vari fattori (tempo di apertura del circuito di Sample tempo di assestamento del segnale tempo di ritardi di switching ecc) comunque il tempo di acquisizione del segnale è proporzionale alla C del condensatore.

## 7.3 Circuiti di Sample Hold

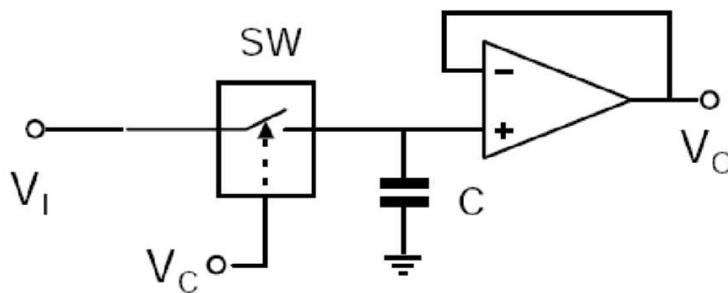
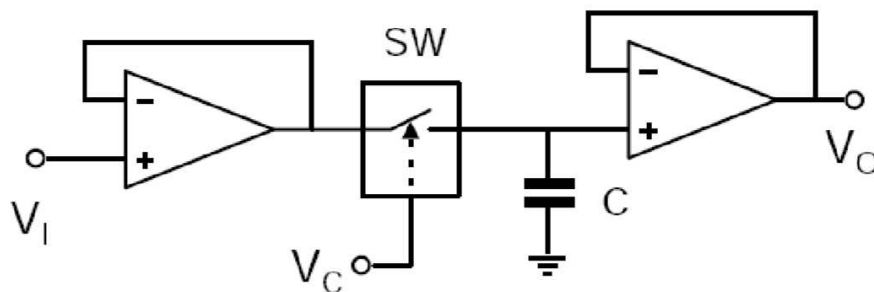
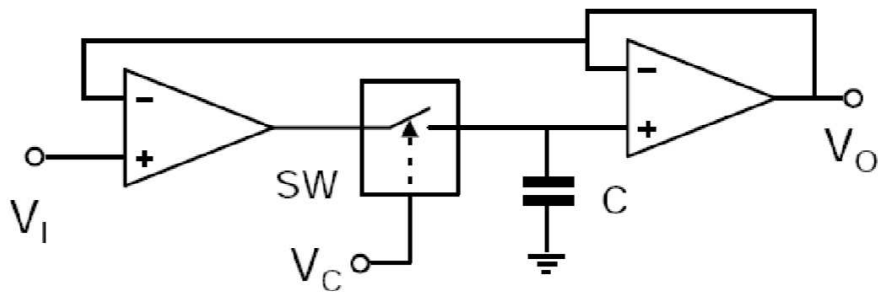


Fig.2 Circuito con voltage Follower



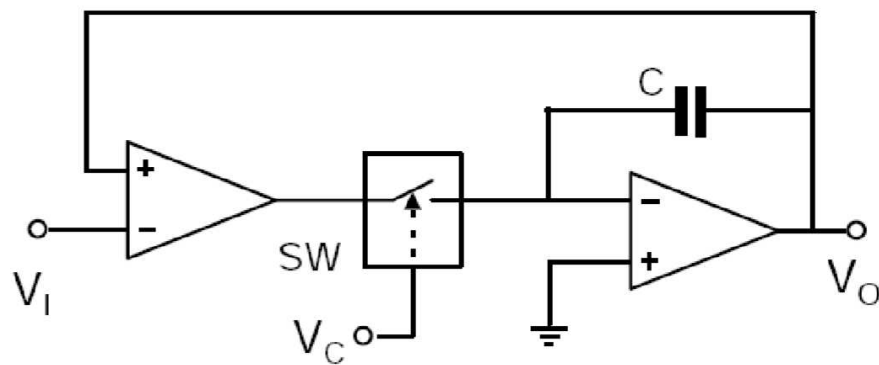
Circuito con doppio voltage follower

Fig.3



Circuito

come unico voltage follower

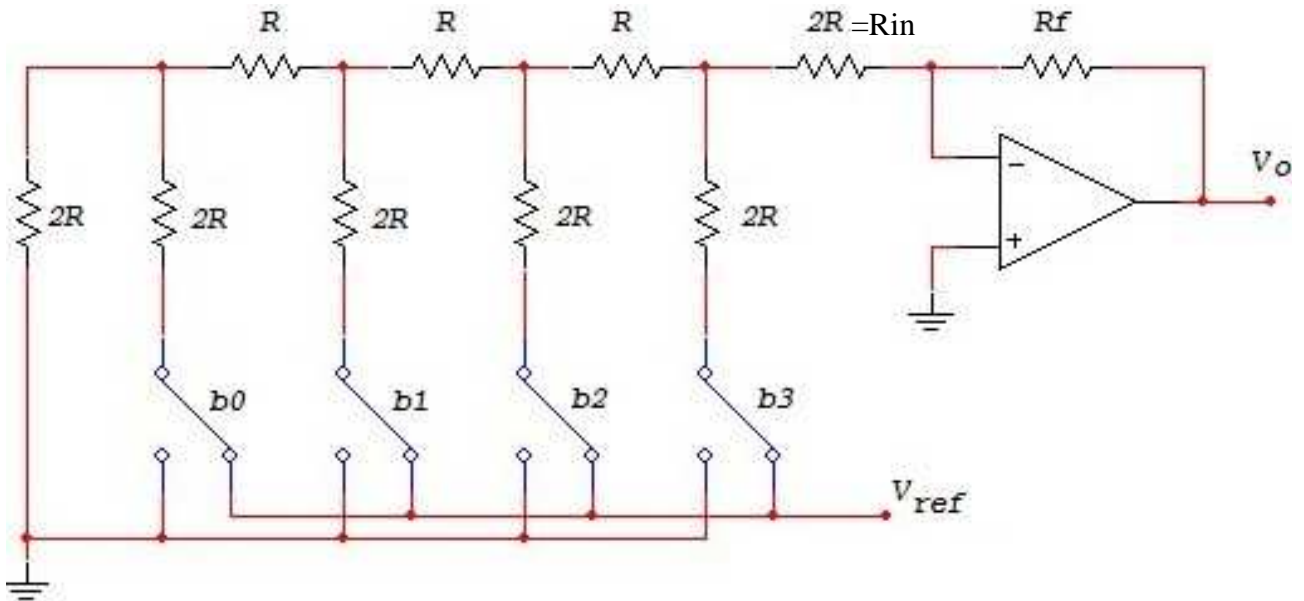


Circuito

S/H a integratore

Per quanto riguarda i circuiti integrati all-in one commerciali di S/H ricordo i seguenti chip: TDA1535B, AD585, LF198, SMP04.

### 7.4. Convertitore DAC R-2R scala diretta

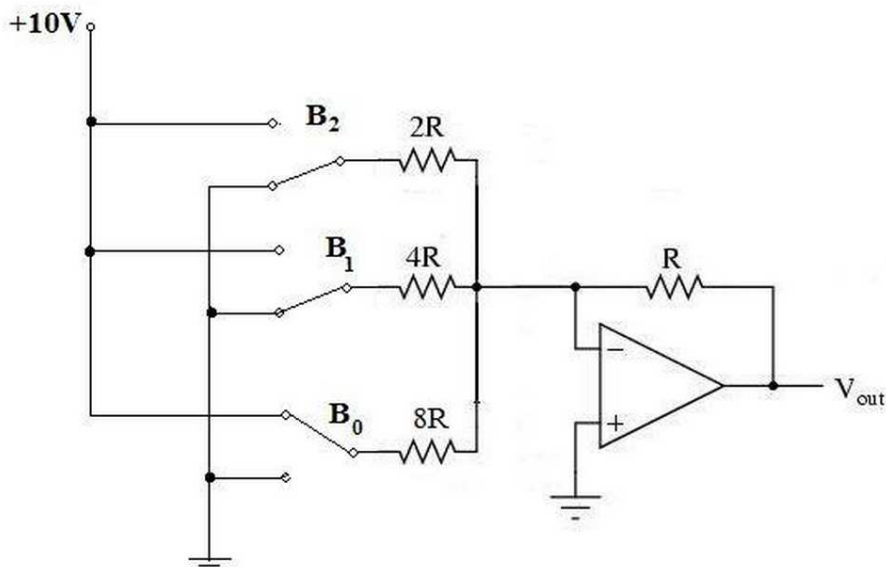


$$V_{output} = \frac{-R_f}{3R} \frac{(V_{Ref})}{(2^{(nbit)})} (2^{(n-1)}b_3 + 2^{(n-2)}b_2 + 2^{(1)}b_1 + 2^{(0)}b_0)$$

P.S importante: si può levare la Rin=2R ottenendo

$$V_{output} = \frac{-R_f}{R} \frac{(V_{Ref})}{(2^{(nbit)})} (2^{(n-1)}b_3 + 2^{(n-2)}b_2 + 2^{(1)}b_1 + 2^{(0)}b_0)$$

### 7.5 Convertitore DAC a resistenze pesate



$$V_{output} = \frac{-R_f}{R} \frac{(V_{Ref})}{(2^{(nbit)})} (2^{(n-1)}b_3 + 2^{(n-2)}b_2 + 2^{(1)}b_1 + 2^{(0)}b_0)$$

Schema elettrico

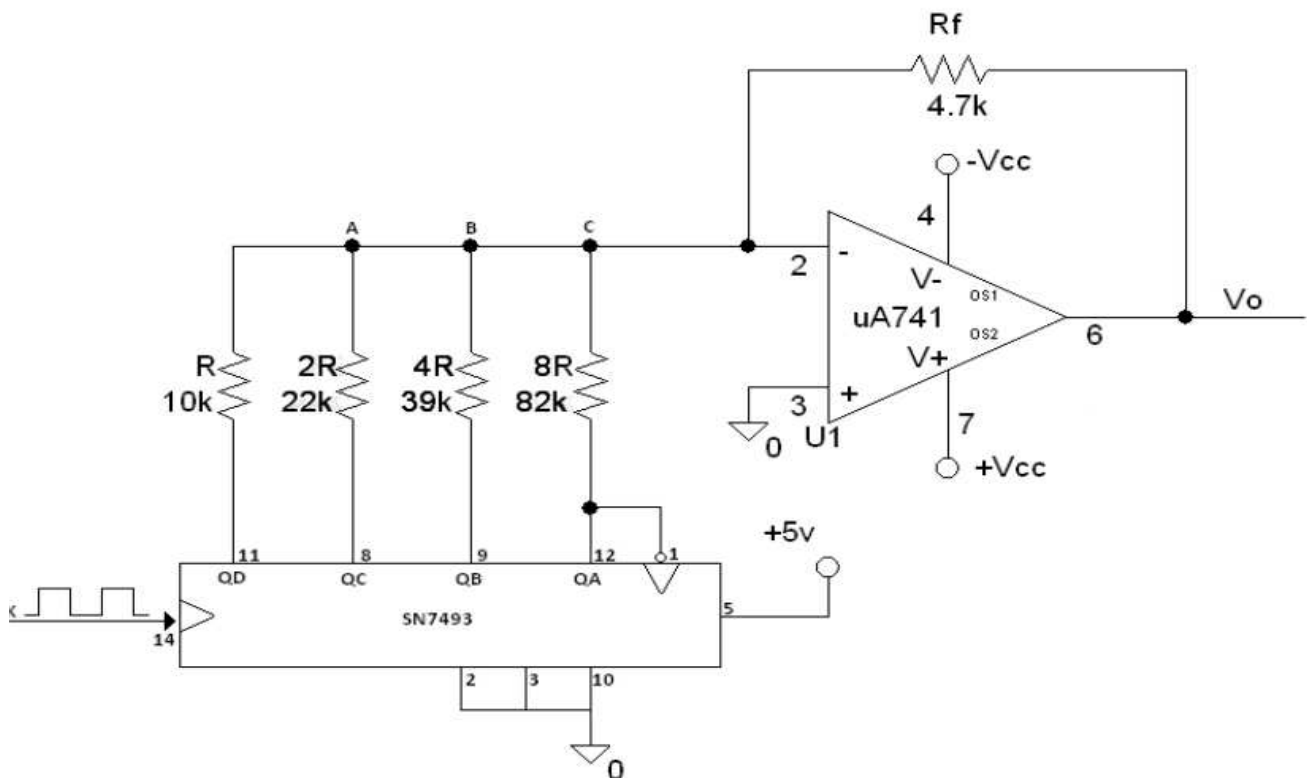


Fig.2 Schema elettrico DAC a resistenze pesate con integrati SN7493 e uA741

P.S notare che in questa configurazione le Vout del DAC a resistori pesati e R-2R scala diretta sono uguali

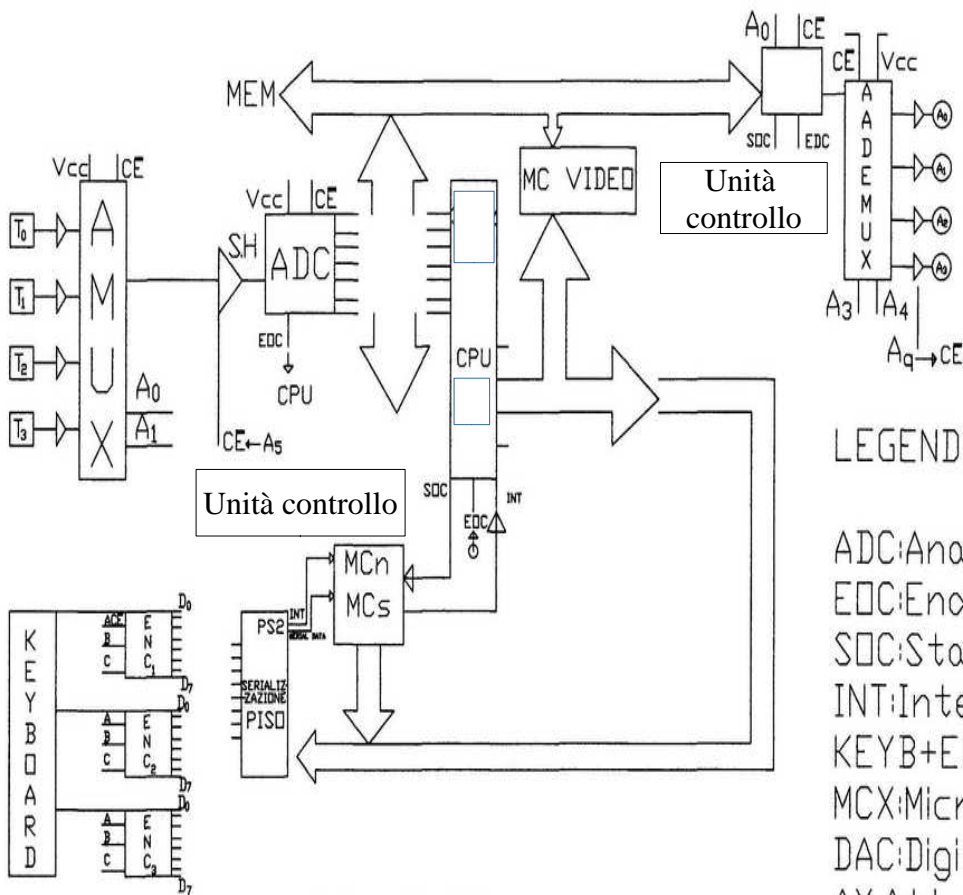
Esercizio realizzare un DAC r-2R 2 3 bit assumendo  $V_{FS} = 0,6 V$  e  $t_{conv} = 0,5 ms$  verificare la necessità di un circuito S/H. Disegnare l'oscema completo, considerando la C del condensatore nel S/H  $c = 15000 KpF$



Schema acquisizione e distribuzioni dati in un sistema a micro controller e CPU.

Disegnare lo schema facendo riferimento a quello sul sito internet e facendo riferimento alle esercitazioni Arduino in classe

Domanda: che differenze ci sono fra un sistema acquisizione dati controllato da micro C e un altro controllato da CPU e tutti gli altri ausiliari necessari



LEGENDA:

ADC: Analogic Digital Converter

EDC: End Of Conversion

SDC: Start Of Conversion

INT: Interrupt Request Mask

KEYB+ENCX: Codifica ASCII -> PS/2

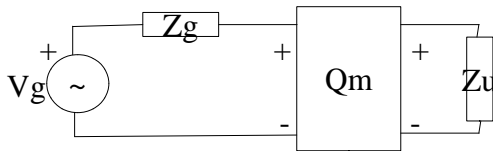
MCX: Micro Controller

DAC: Digital to Analogic Converter

AV: Attuatori

## 8. Adattamento delle linee di trasmissione

Per affrontare lo studio delle telecomunicazioni (TLC) dobbiamo considerare sempre un circuito composto da Bipolo generatore, mezzo trasmissivo che si considera come un quadripolo passivo o doppio bipolo (la corrente in ingresso al bipolo è uguale e verso opposto alla corrente in uscita) ed infine il bipolo carico con tale schematizzazione si rappresentano molti dei vari tratti che compongono un sistema anche complesso di TLC.



Possiamo distinguere sistemi di TLC Analogici e Digitali. Il sistema di telecomunicazioni (TLC) può essere di vario tipo a seconda del tipo di segnale che trasporta l'informazione e a seconda del mezzo  $Q_m$  (quadripolo mezzo trasmissivo); in base al tipo di segnale si distinguono TLC di tipo

1. Elettromagnetico (onde radio-audio-video, micro-onde)
2. Ottico (onde EM entro un mezzo trasmissivo detto fibra ottica, collegamenti con frequenza dell'infrarosso vedi seguito spettro in frequenza lunghezza d'onda delle O.E.M ed esercizi relativi);
3. Sonoro (mediante suoni che si trasmettono nel mezzo come la ns voce, il suono di strumenti musicali, ultrasuoni, infrasuoni);
4. Elettrico (TLC su cavo tipo doppino telefonico o cavo ethernet per ex. RJ45)

inoltre le TLC si distinguono in: funzione della frequenza con cui il segnale contenente l'informazione viene trasmesso sul mezzo trasmissivo dal Trasmettitore Tx al ricevitore Rx.

In base al mezzo trasmissivo si distinguono TLC

via cavo;

via Radio (attraverso lo spazio che si considera un mezzo trasmissivo come un cavo ma con altre caratteristiche tipiche del quadripolo mezzo trasmissivo  $Q_m$  che esamineremo in seguito) ricordare che si trasmettono via radio solo onde elettromagnetiche).

Se la frequenza trasmessa sul mezzo è uguale a quella emessa dal generatore di segnale  $V_g$  allora si parla di trasmissione in BANDA BASE (il segnale vocale sia quando parliamo con qualcuno di persona oppure al telefono; la differenza sta nel fatto che di persona la banda passante del Tx/Rx in condizioni normali di perfetto udito da parte gli entrambi interlocutori va da segnali bassi con  $f=16\text{Hz}$  a segnali altissimi di  $f=19500\text{ Hz}$  in media, mentre mediante doppino telefonico la banda va da una frequenza minima di  $300\text{ Hz}$  ad una max di  $3400\text{ Hz}$  (con una banda di  $3100\text{ Hz}$  a causa delle caratteristiche  $Q_m$  del doppino e perché tale banda è sufficiente per permettere di distinguere i suoni e le parole dell'interlocutore sia pure con un timbro differente a causa delle frequenze eliminate dalla trasmissione).

Quando osserviamo un arcobaleno osserviamo il fenomeno della rifrazione della luce bianca solare. Il colore bianco della luce solare è la sovrapposizione di tutte le frequenze visibili delle OEM che vanno dal rosso al violetto; all'aumentare della frequenza aumenta anche l'indice di rifrazione del mezzo che scompone così il raggio incidente bianco in tutti i colori che lo compongono che hanno frequenza crescente dal Rosso  $375\text{ Thz}$  al Violetto  $750\text{ Thz}$  (vedi anche il prisma di Newton).

Vedi capitolo riguardante il teorema di Fourier nel secondo volume.

Se la frequenza del segnale di generatore da trasmettere nel mezzo viene troppo attenuata dal mezzo o riflessa o rifratta in modo indesiderato per poter far arrivare il segnale alla distanza desiderata si opera in cosiddetta BANDA TRASPOSTA O TRASLATA cioè si impone al segnale da trasmettere contenente l'informazione che d'ora in avanti chiameremo modulante con frequenza  $f_m$  una

frequenza maggiore posseduta da un segnale che chiameremo portante  $f_p$  che ha un comportamento ottimale nel mezzo e permette di raggiungere la distanza desiderata. Per ogni tipo di segnale sia elettromagnetico che sonoro ecc.. che abbiamo elencato la frequenza del segnale stesso è un parametro fondamentale per valutare quanto il segnale in esame sia RIFLESSO RIFRATTO ASSORBITO O DIFFUSO dal mezzo.

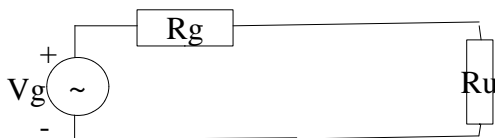
Ad esempio per le onde elettromagnetiche per le telecomunicazioni terrestri via radio si possono avere 5 tipi di propagazione naturale in cui la frequenza è il parametro fondamentale (non consideriamo la trasmissione artificiale via satellite che trattiamo a parte):

1. Onda di superficie
2. Onda riflessa dalla ionosfera;
3. Onda diretta;
4. Scattering troposferico;
5. Onda riflessa dal suolo.

Ogni tipo di propagazione avviene in funzione principalmente della frequenza, ovviamente la conformazione del suolo può permettere di preferire o ritenere necessario un modo o l'altro. Per esempio durante la seconda guerra mondiale radio Londra utilizzava un segnale radio in LF banda 30 KHz- 300 KHz, che poteva essere captato dalle stazioni non in vista diretta con il tx, come quelle francesi, se non di notte quando lo strato ionosferico aveva una densità, temperatura e costituzione tale da riflettere le onde trasmesse con quella banda di frequenza, che così potevano essere ricevute in francia la notte, grazie alla riflessione ionosferica.

Il generatore ha due polarità che se chiuse in corto circuito sono percorse dalla corrente massima circolabile nel circuito  $I_{cc}$  corrente di corto circuito tale corrente può avere valore efficace tale da fare incendiare il conduttore oppure no dipende dalla sua entità. Se ciò accadesse si dovrebbe poter diminuire tale valore di corrente interponendo fra i conduttori una resistenza che determina la diminuzione della corrente. La  $R_g$  interna del generatore è data da  $R_g = V_g / I_{cc}$  (calcolati con i valori massimi delle correnti e tensioni o con i valori efficaci il risultato non cambia.

Consideriamo il seguente circuito 1:  $R_g = 50 \Omega$   $R_u = 150 \Omega$   $V_{g\text{picco}} = 1,414 \text{ V}$   $f = 50 \text{ Hz}$  Calcoliamo la tensione disponibile sul carico  $R_u$



Effettuiamo i calcoli con la tensione efficace =  $V_g \times 0.707$  indicata con  $V_{g\text{rms}} = 1 \text{ V}$  considerato che scorre la stessa corrente attraverso  $R_g$  ed  $R_u$  si conclude che la tensione ai capi di  $R_u$  è 3 volte più grande di quella ai capi di  $R_g$  perciò  $V_{u\text{rms}} = 0,750 \text{ V}$

perciò la potenza disponibile ai capi di  $R_u$  risulta essere  $P_d = (V_{u\text{rms}})^2 / R_u = 3,75 \text{ mW}$

(come si vedrà tale valore si può esprimere in becibell milli  $\text{dBm} = 10 \log_{10} P_d = 5,74 \text{ dBm}$ )

Si può dimostrare che la potenza massima disponibile di generatore è data da:

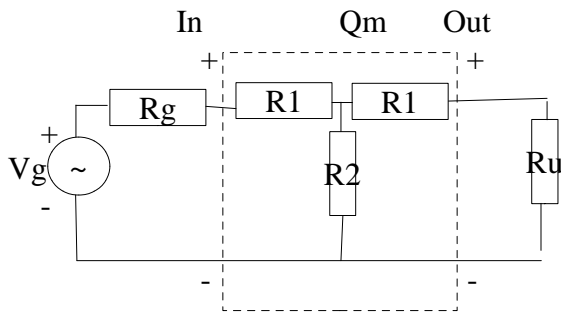
$$P_d = (V_g)^2 / 4R_g$$

imponendo però che

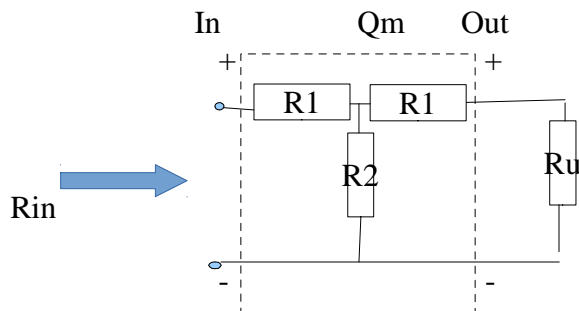
$$R_u = R_g$$

tale condizione per cui si ha il massimo trasferimento di potenza dal generatore (con resistenza interna  $R_g$ ) al carico  $R_u$  è detta adattamento della rete (in questo caso puramente resistiva).

Consideriamo ora il seguente circuito 2 (in cui la linea è rappresentata mediante un quadripolo attenuatore a T):

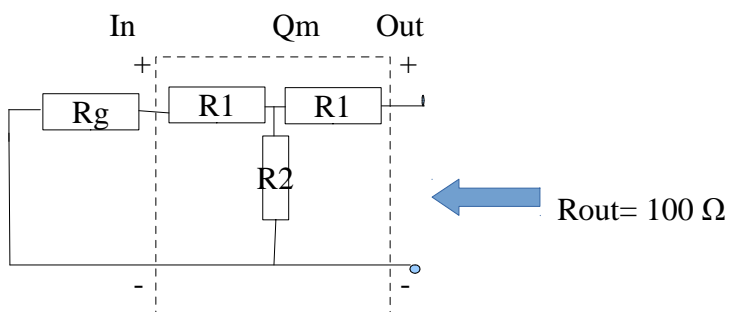


Il quadripolo passivo detto doppio bipolo di figura presenta una certa resistenza equivalente se visto dai morsetti + e - di ingresso In:



se si assume  $R_1 = 50 \Omega$ ; e  $R_2 = 100 \Omega$ ;  $R_g = R_u = 50 \Omega$ :  
 $R_{in} = 100 \Omega$

se si misura la resistenza invece ai morsetti + e - in uscita cortocircuitando il generatore  $V_g$  come da schema seguente:



in questo caso dato che  $R_{in}=R_{out}$  il doppio bipolo si dice simmetrico.

La condizione di adattamento di tale linea puramente resistiva è data da:

$$R_g=R_{in}$$

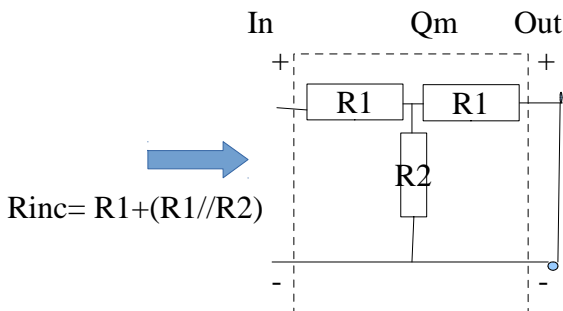
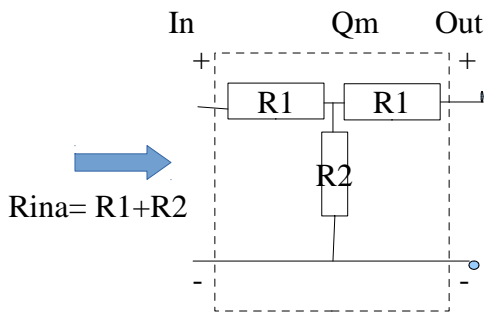
$$R_u=R_{out}$$

In questo caso la condizione di adattamento non è rispettata.

L'adattamento della linea sudeta può essere fatto con il seguente metodo detto delle impedenze (resistenze) immagine:

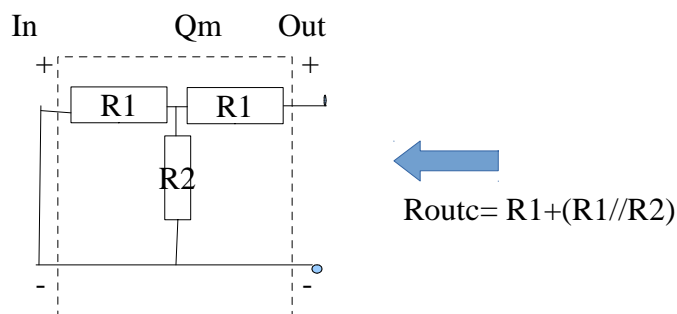
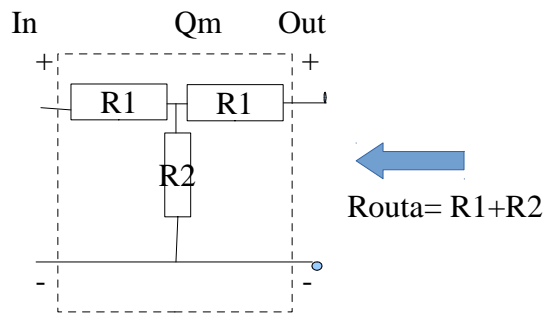
Si considera il quadripolo attenuatore T senza considerare il bipolo generatore ed il bipolo utilizzatore:

Si calcola la  $R_{in}$  sia a circuito aperto che a corto circuito  $R_{ina}$  e  $R_{inc}$



e ricavare  $R_{inImm} = \sqrt{R_{ina} R_{inc}} = 111 \Omega$

La stessa operazione si effettua rispetto ai morsetti di uscita del doppio bipolo:



e ricavare  $R_{outImm} = \sqrt{R_{outa} R_{outc}} = 111 \Omega$

poiché  $R_{outImm} = R_{inImm} = R_0$  il doppio bipolo si dice simmetrico ed è caratterizzato da una impedenza caratteristica (resistenza caratteristica se puramente resistivo) pari a  $R_0$ .

Per procedere all'adattamento della linea del circuito 2 deve essere quindi:

$R_g = R_o = R_u = 111 \Omega$

Normalmente i conduttori bipolari che costituiscono una linea di trasmissione via cavo sono di due tipologie

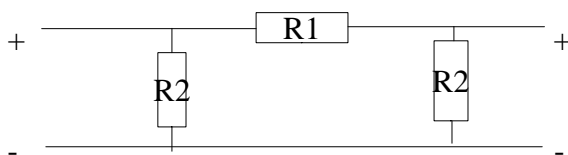
1. A coppie simmetriche per le basse frequenze dal finico 1KHz  $Z_o = 600 \Omega$   $150 \Omega$   $-125 \Omega$  per le basse frequenze  $100 \Omega$  medie frequenze (100 Mhz)
2. Cavo coassiale  $75 \Omega$  per alte frequenze  $50 \Omega$  per altissime frequenze.
3. Guide d'onda per alte frequenze e alta potenza disponibile sul carico utilizzatore.

Per la linea trattata valgono le seguenti relazioni:

attenuazione A

$$A_{[dB]} = 20 \log_{10} N \text{ con } N = \frac{V_i}{V_o} \text{ fattore di attenuazione}$$

esistono anche attenuatori a  $\pi$ :

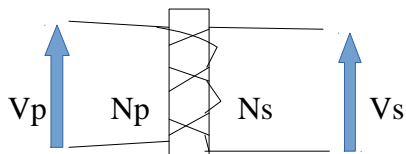


inoltre esistono molto utilizzati gli adattatori a trasformatore:

Il trasformatore è una macchina elettrica passiva cioè non alimentata esternamente.

In campo di TLC può essere considerata un doppio bipolo adattatore.

Il trasformatore è costituito da un traferro costituito da un pacchetto di lamine di ferro isolate fra loro per eliminare correnti dette parassite e da un avvolgimento primario composto da  $N_1$  spire e da un avvolgimento secondario isolati elettricamente fra loro e dal pacchetto di lamine del traferro intorno al quale sono avvolti:



la relazione fondamentale del trasformatore è la seguente:

$$V_p:V_s=N_p:N_s \quad (1)$$

Deve essere osservato che il collegamento fra primario e secondario non è ohmico vale a dire non vi è contatto elettrico, collegamento fisico fra i conduttori poiché gli stessi risultano elettricamente isolati. Se la tensione  $V_p$  è continua sul secondario la tensione è  $V_s=0$  cioè il trasformatore trasforma la tensione secondo il numero di spire primarie e secondarie ma solo se la tensione è variabile ed in particolare alternata unipolare o bipolare oppure come nel caso di accensione delle candele all'interno della cilindrata di un motore a combustione interna di un'automobile, quando viene dato un impulso in bassa tensione sul lato primario che ha la forma di un dente di onda quadra con  $V_{max} 12 V$ : sul lato secondario in corrispondenza di questa variazione si instaura la tensione trasformata di 10.000 V circa: il rapporto spire risulta di 12/10000 cioè se sul lato primario sono 12 sul secondario 10000 per avere detto rapporto di trasformazione. Poiché la macchina è passiva e se si considerano nulle le perdite di potenza per il riscaldamento del traferro a causa di correnti parassite (di cui si tiene conto per trasformazioni di segnali con elevata potenza di trasmissione), si può assumere la potenza in ingresso uguale alla potenza in uscita  $P_i=P_{out}$  cioè l'attenuazione in potenza prodotta dal trasformatore risulta  $10 \log P_i/P_{out}$  in dB.

Risulta anche  $V_p \times I_p = V_s I_s \quad (2)$

poiché se visto come doppio bipolo il trasformatore inserito in un circuito di trasmissione di un segnale presenta una  $R_{in}$  ed una  $R_{out}$  che corrispondono alle resistenze viste dai morsetti + e - lato primario e secondario rispettivamente.

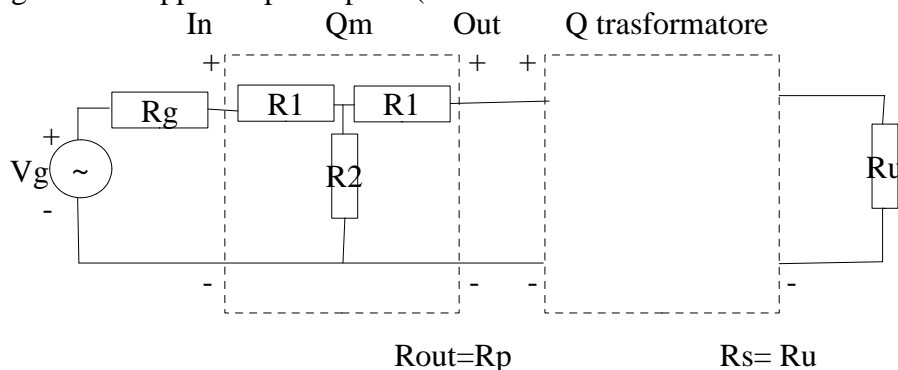
$$I_p = V_p / R_p \quad (3)$$

$$I_s = V_s / R_s \quad (4)$$

mettendo a sistema le 1,2,3 e 4 si ottiene

$$\left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 = \frac{R_p}{R_s}$$

si noti che  $R_s=R_u$  in un circuito come il seguente; inizialmente il circuito è disadattato e mediante l'inserimento di un trasformatore adattatore tale da avere  $R_p=R_{out}$  del quadripolo simmetrico non adattato che costituisce la linea, e  $R_s=R_u$  resistenza caratteristica di un'antenna, e fissare di conseguenza il rapporto spire  $N_p/N_s$  (senza l'adattatore a trasformatore  $R_u$  è diversa da  $R_{out}$ ).



Se il carico della linea è disadattato si ha una riflessione di segnale, l'onda riflessa costituisce un

ECO che può essere un disturbo per il segnale di generatore in quanto giunge al generatore ritardata di un tempo che dipende dalla velocità del segnale nel mezzo trasmissivo, inoltre come già osservato si ha una attenuazione aggiuntiva sul segnale di generatore o di sorgente ed infine se la potenza riflessa è rilevante può danneggiare gli stadi di transistor finali del generatore di sorgente stesso.

## Approfondimento:

Quando un certo numero di cariche sono contenute entro un Volume diciamo sferico, creano un campo Elettrico conservativo tale cioè che il lavoro fatto dalle forze di campo sulla grandezza fisica su cui esse agiscono, la carica elettrica elementare  $e = -1,610^{-19} C$  per esempio, in un circuito chiuso è uguale a 0. In tale campo è possibile definire il potenziale elettrico cioè energia potenziale elettrica per unità di carica elettrica che è in grado di far muovere la carica elettrica entro un mezzo resistivo secondo la legge di Ohm. Quando una portata di carica elettrica  $C/s = A$  (ampere) scorre entro un conduttore attorno al conduttore stesso, si crea un ulteriore campo di forze detto Magnetico ed indicato con B (si noti che esso è un vettore come lo è g e come E). Il campo gravitazionale ed elettrico che essendo conservativi hanno anche la caratteristica di essere centrali cioè le linee tangenti alle forze di campo sono aperte e convergono tutte verso il centro della massa che lo esercita mentre convergono e divergono verso e dal centro a seconda dei segni delle cariche che determinano il campo E; il campo B non è conservativo e le linee di forza sono chiuse. In un filo conduttore la forza di campo magnetico F è tangente a infinite circonferenze concentriche trasversali all'asse del conduttore e di raggio pari alla distanza dal conduttore percorso da corrente i. In modulo il valore di tale forza è  $F = BiL$  con L lunghezza del conduttore.

Se si considerano due conduttori paralleli percorsi da corrente continua e distanti d, la forza esercitata da entrambi i conduttori dovuta al campo B da essi creato in ogni punto può essere tale da attrarre i due conduttori se percorsi da correnti in verso uguale ed a respingersi se percorsi da corrente opposta.

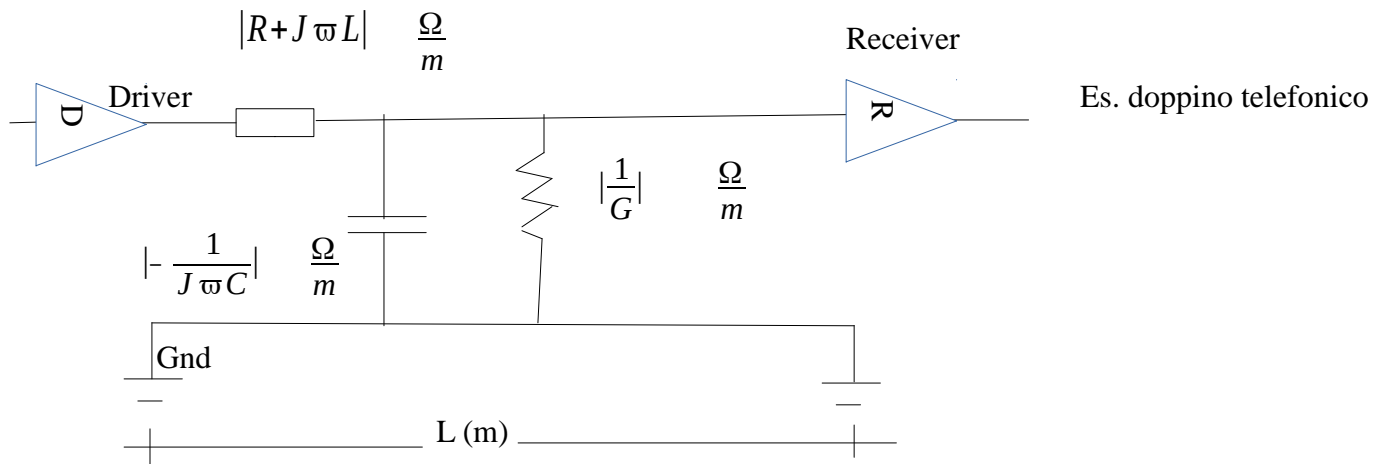
Se la corrente è variabile allora è variabile B agente su una certa superficie S attraversata da esso. La variazione di  $B \cos \varphi$  definito come flusso con  $\varphi$  angolo fra il vettore B e il piano della superficie rispetto al tempo determina sulla superficie stessa una tensione chiamata indotta  $V_i$

$$V_i = \frac{(\Delta B \cos \varphi)}{(\Delta t)}$$

la tensione indotta  $V_i$  è quella presente ai morsetti del circuito secondario di un trasformatore.

## 8. 1 Studio delle linee di trasmissione

Possiamo schematizzare una linea in due modi differenti in funzione dell'analisi energetica e dimensionale seguita; tale scelta è dovuta ai concetti di linea lunga e corta. Se la linea è corta cioè se il tempo di salita di un bit (rise time) vale a dire il tempo necessario ad un bit per poter essere generato con ampiezza dal 10 % al 90 %, è molto più piccolo del ritardo della ricezione dovuto alla velocità di propagazione del segnale sulla linea (detto ritardo di propagazione; vedi seguito); in sintesi per meglio ricordare: il driver non ha ancora finito di generare il bit al 90 % della sua ampiezza, che il receiver né ha già ricevuto il 10 %. In questo caso si dice che il driver vede il carico durante il fronte di salita. Se la linea è corta si può utilizzare un metodo di calcolo e schematizzazione della linea "semplificato" denominato a parametri concentrati in cui la linea è rappresentata nel modo seguente:



si considera perciò innanzi tutto un impedenza caratteristica di linea piuttosto che una resistenza caratteristica; inoltre si deve notare che tali caratteristiche schematizzate vengono considerate costanti mentre in realtà, per linee lunghe in particolare, ciò non è vero.

L'impedenza caratteristica della linea sopra schematizzata in cui si considerano i seguenti dati detti **costanti primarie** espressi in:

$L = \mu\text{H}/\text{m}$      $\text{H} = \text{Henry}$     induttanza

$C = \text{pF}/\text{m}$      $\text{F} = \text{Farad}$     capacità

$R = \text{m}\Omega/\text{m}$      $\Omega = \text{Ohm}$     resistenza

$G = \mu\text{S}/\text{m}$      $\text{S} = \text{Sievert}$  conduttanza  $G = 1/R$

*sono funzioni  $f$  (geometria, materiale,  $T$  ambiente);*

sono dati forniti dal costruttore e dipendono dalla geometria della linea: dimensioni, sezione, distanza fra i conduttori e dal materiale costituente il conduttore. Per la sezione viene usata la notazione americana AWG (da 28 a 18 senza i dispari 27 25 etc..) corrispondenti a mmq (da 0,08 a 1 mmq).

Da queste costanti primarie si risale alle **costanti secondarie**

'impedenza di ingresso cella lunga 1 m è data da:

$$Z_{InCA} = \frac{1}{j\omega C} \text{ parallelo } \frac{1}{G} \text{ che da } \frac{1}{Z_{parallelo}} = \frac{1}{\frac{1}{G}} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} \text{ quindi: } Z_{InCA} = \frac{1}{G} + \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_{InCC} = R + j\omega L$$

$$Z_{InIm} = \sqrt{(Z_{InCC} Z_{InCA})} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

Facendo il calcolo dell'impedenza immagine di uscita, si ottiene lo stesso valore appena scritto perciò la impedenza caratteristica di tutta la linea con R, L, C e G già calcolati moltiplicando i dati, sopra riportati per unità di lunghezza, per tutta la lunghezza L della linea.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}$$

considerando la linea priva di dissipazione in termini di G e R relativi alla dissipazione termica e alla conduttività fra i due conduttori (quello di terra ed il positivo) allora gli anzi detti termini si possono trascurare ottenendo:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{dimensioni } Z_0 = \Omega$$

il ritardo di propagazione di cui si è sopra accennato:

$$t_p = \sqrt{LC} \quad \text{dimensioni } t_p = \frac{s}{m} \quad \text{ogni metro di conduttore si ha detto ritardo di propagazione}$$

La velocità di propagazione del segnale è data dall'inverso del ritardo di propagazione

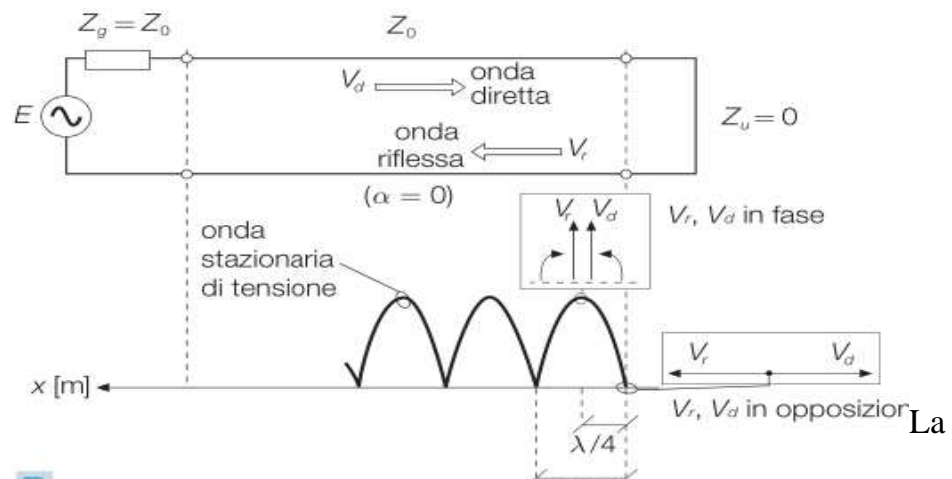
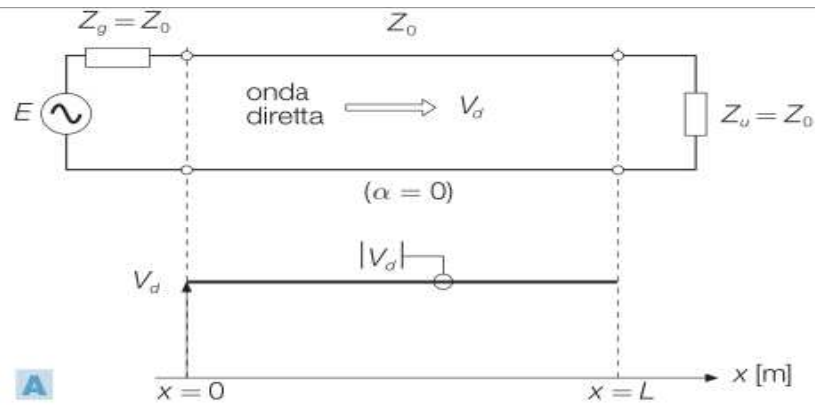
$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{m/s}$$

## 8.2 Riflessione, Disadattamento della linea e Onda stazionaria

Quando la linea di comunicazione è disadattata nasce sulla linea un onda stazionaria di tensione i cui ventri distano  $\lambda/2$  (così come i nodi) e la distanza fra un nodo ed un ventre di tensione è  $\lambda/4$ . Il disadattamento determina l'onda stazionaria e quest'ultima è generata dalla presenza contemporanea sulla linea del segnale diretto all'antenna e di quello riflesso sfasato rispetto all'onda diretta di  $\pi$  in corrispondenza dei nodi e le stesse onde sono in fase in corrispondenza dei ventri (vedi figura di seguito: caso -A linea adattata, caso -B linea disadattata). Si introduce l'indice di riflessione  $\rho = V_r/V_i$  dato anche dal seguente rapporto di impedenze:

$$\rho_v = \frac{(Z_u - Z_0)}{(Z_u + Z_0)}$$

L'onda stazionaria di tensione o di corrente lungo la linea è l'andamento di tali parametri lungo la linea a causa della presenza del segnale diretto sull'antenna quest'ultima rappresentata come un bipolo passivo  $R_u$  e il segnale riflesso, a causa come anzidetto del disadattamento della linea nel suo complesso. Per adattare la linea si può intervenire con adattatori attenuatori o con adattatore a trasformatore oppure mediante 'aggiunta di uno spezzone di linea lungo  $\lambda/4$ .



tensione in corrispondenza del ventre è indicata con  $V_{max}$  mentre quella in corrispondenza del nodo è in con  $V_{min}$ :

$$\begin{cases} V_{max} = |V_d| + |V_r| = |V_d| \cdot (1 + |\rho_v|) \\ V_{min} = |V_d| - |V_r| = |V_d| \cdot (1 - |\rho_v|) \end{cases}$$

Se c'è onda stazionaria su una linea la stessa è disadattata, il ROS (VSWR) è l'indice di tale disadattamento

ROS= rapporto onda stazionaria

VSWR=Voltage standing wave ratio;

$$ROS = \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

se ROS (rapporto onda stazionaria)=0 perfetto adattamento;

se ROS (rapporto onda stazionaria)= $\infty$  perfetto disadattamento;

se ROS (rapporto onda stazionaria)=1- 1,5 disadattamento accettabile;

se ROS (rapporto onda stazionaria) > 3 disadattamento inaccettabile.

Se a linea non viene inoltre terminata con una resistenza, una capacità o un'induttanza o meglio con una combinazione delle tre grandezze per vedere soddisfatta la condizione di adattamento già espressa per linee puramente resistive e che ora nel caso generale di linea reale schematizzata con impedenze  $Z_g$ ,  $Z_{in}$ ,  $Z_{out}$  e  $Z_u$  basterà alle condizioni di adattamento in funzione di  $R$  sostituire a piè pari  $Z$  ad  $R$  mantenendo inalterato il suffisso e perciò dovrà essere:

$$\begin{aligned} Z_g &= Z_{in} \\ Z_u &= Z_{out} \\ Z_{in} &= Z_{out} \text{ per la condizione di linea simmetrica} \end{aligned}$$

### 8.3 Terminazione serie e parallelo

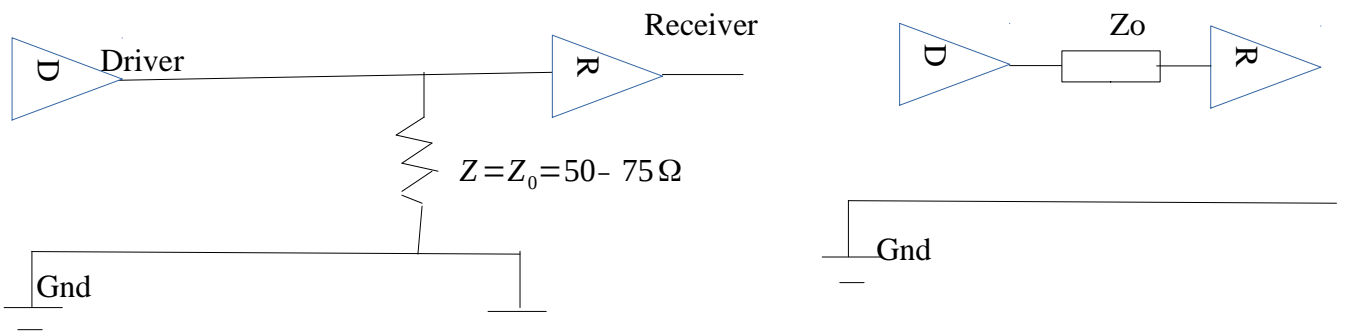
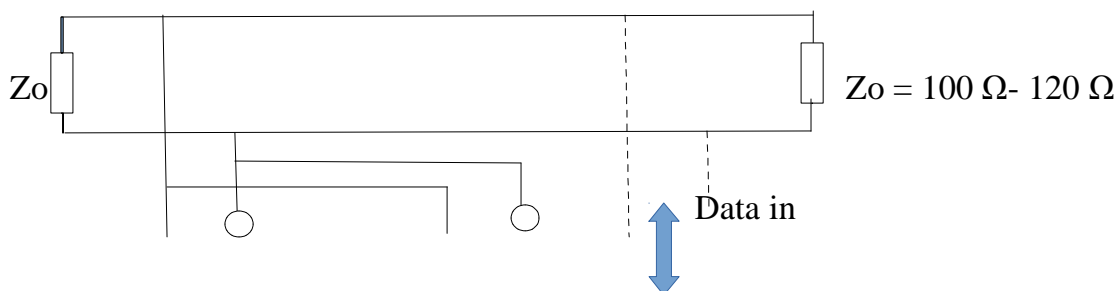


Fig.2.1.1. terminazione parallela a sinistra e serie a destra su cavo coassiale ad es RG213  $Z_o=50\Omega$ ;



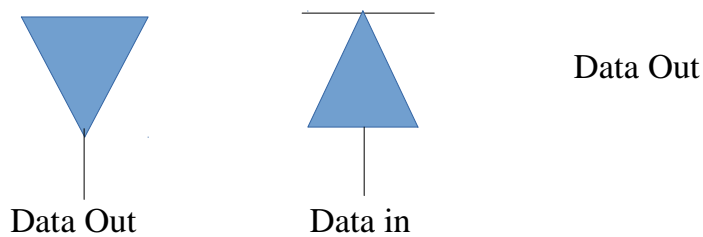


Fig.2.1.2. terminazione parallela su linea di bus (N.B. a destra si sarebbe dovuto schematizzare così come a sinistra;

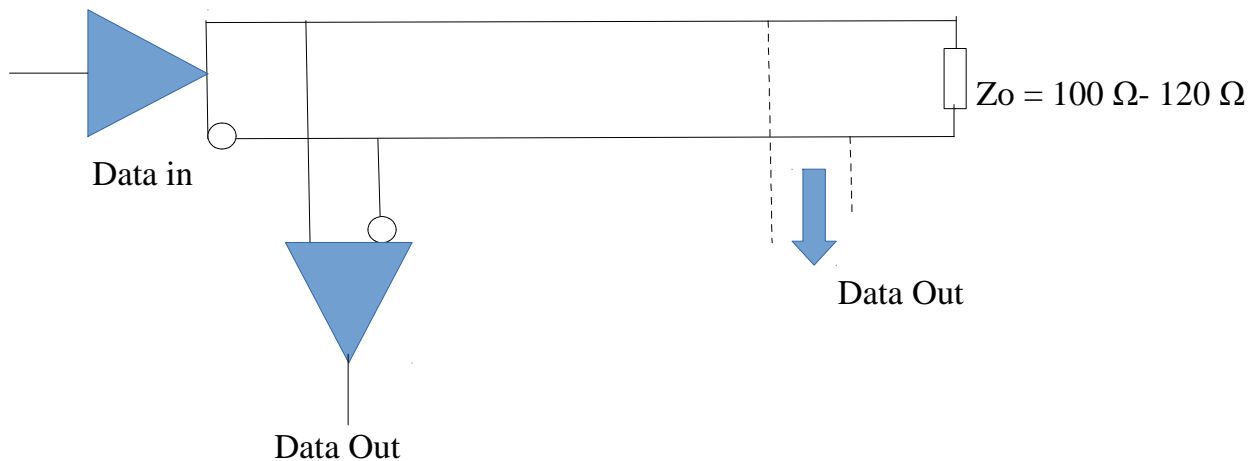


Fig.2.1.2. terminazione parallela su linea di bus (N.B. a destra si sarebbe dovuto schematizzare così come a sinistra);  $Z_o$  doppiino  $100 \Omega$ -  $120 \Omega$ ;

## 9. Onde elettromagnetiche

Cos'è un'onda elettromagnetica? La risposta è lontana dalle applicazioni in telecomunicazioni. Un'onda elettromagnetica è una soluzione di un sistema di equazioni cardinali dell'elettromagnetismo chiamate equazioni di Maxwell; è cioè una possibilità reale di propagazione di una perturbazione dello spazio libero, vuoto, detto etere dovuta alla variazione in modulo e verso del vettore campo elettrico contro reazionata da una variazione in modulo e verso del campo magnetico  $H$  per ottenere l'equilibrio elettrodinamico del sistema. Essa viene generata da un sistema dotato di massa sotto forma di quanti a forma fisico-matematica di singole onde sinusoidali elementari, in cui ogni quanto è composto da un solo periodo dell'onda. Più brevemente si può dire che la massa ed energia elettromagnetica rappresentano lo stesso ente ma sotto diverse sembianze che gli sono date dalle condizioni fisiche in cui si trova date sostanzialmente dalle funzioni di stato termodinamico: temperatura e pressione. Tali funzioni di stato sono le responsabili dello stato massivo o elettromagnetico dell'ente che le determina. Siamo tutti testimoni dei cambiamenti macroscopici di stato della materia, da solida e liquida a gassosa e da qui a plasmatica per effetto delle suddette funzioni di stato. Durante tali cambiamenti di stato vengono prodotte oppure assorbite OEM ma il bilancio energetico totale rimane il medesimo.

La relazione di equivalenza fra massa ed energia elettromagnetica è la seguente:

$$E = m c^2$$

esempio 1:

La massa di un elettrone isolato risulta

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-34} \text{ Kg}$$

la sua energia elettromagnetica equivalente è pari a:

$$E = 9.110^{-34} \text{ Kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 81,9 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

con  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  velocità nel vuoto di un OEM

Esempio 2:

La massa di ogni corpo può essere rappresentata sotto forma di massa come si è abituati a fare ma anche sotto forma di energia elettromagnetica vediamo come introducendo un unità di misura molto importante anche in telecomunicazioni l'elettron-volt:

La massa di un elettrone isolato risulta

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-34} \text{ Kg}$$

sappiamo che il potenziale elettrico V è dato da Lavoro per unità di carica elettrica e: in merito all'elettrone:

da cui ricaviamo

$$\mathcal{L} = 1 \text{ eV} \text{ che ha le}$$

dimensioni di un energia [J]

questa grandezza eV si chiama elettron-volt ed è l'unità di misura della massa espressa sotto forma di energia elettromagnetica.

$\mathcal{L} = 1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$  (l'espressione non tiene ovviamente conto del segno della carica dell'elettrone)

per calcolare quindi l'energia elettromagnetica equivalente dell'elettrone perciò si risolve la seguente proporzione:

$$1 \text{ eV} : 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = x \text{ eV} : 81,9 \cdot 10^{-22}$$

$$\frac{81,9 \cdot 10^{-22}}{1,6} \cdot 10^{-19} \text{ J} = 511,8 \cdot 10^3 \text{ eV} = 512 \text{ KeV}$$

## 9.1 Propagazione e parametri di riferimento per il calcolo

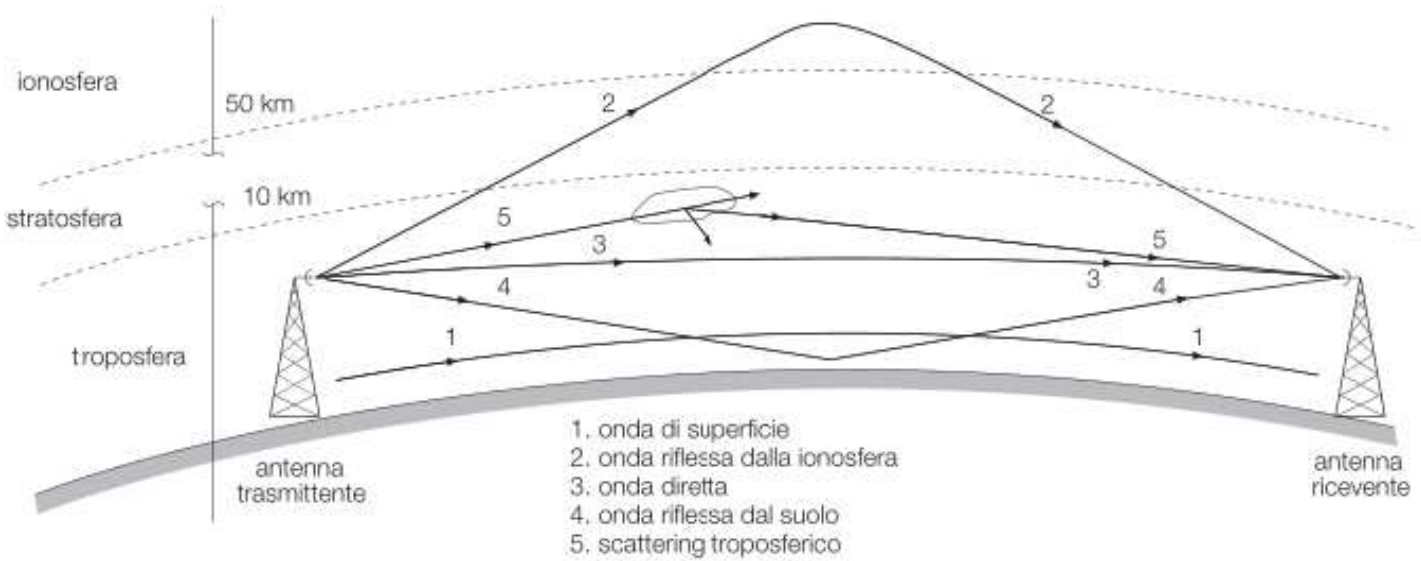


Fig.1: Modi di propagazione dell'OEM (onde elettromagnetiche) per trasmissioni terrestri;

Si ha OEM in Polarizzazione verticale se la direzione del campo Elettrico irradiato è verticale altrimenti si ha polarizzazione orizzontale o polarizzazione H le antenne lineari verticali ed orizzontali captano ed irradiano la componente verticale o orizzontale de campo E.

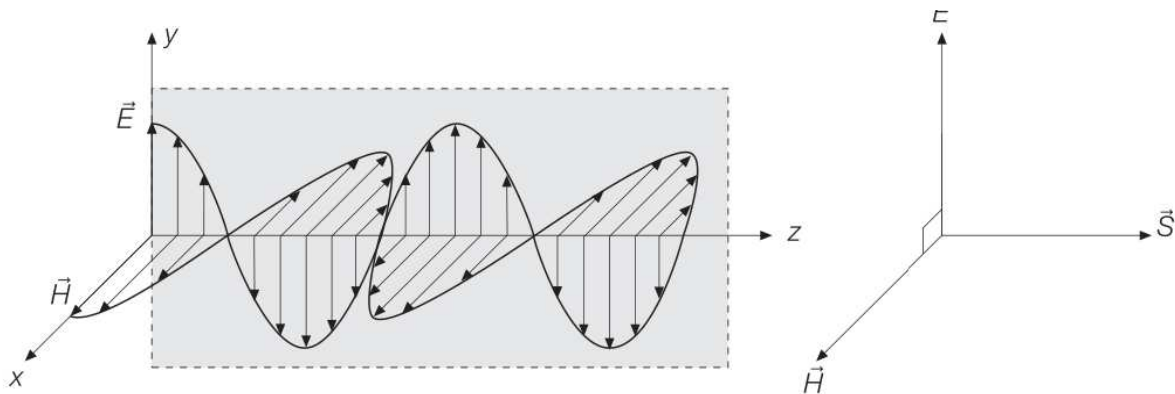


Fig.2: modo fisico matematico di propagazione di una OEM polarizzata verticalmente

Sono particolarmente importanti i seguenti parametri per lo studio ed il progetto di un impianto di telecomunicazione:

Il vettore di Pointing  $\vec{S}$  o densità di potenza:

$$\|\vec{S}\| = \|\vec{E}\| \cdot \|\vec{H}\|$$

espressa nella direzione di propagazione dell'onda. Le sue dimensioni sono:

$$S = \frac{W}{m^2}$$

Il secondo parametro con cui si valuta l'entità di un OEM è il modulo del vettore campo elettrico E diretto per convenzione secondo l'asse in cui viene definita polarizzata l'OEM

$$E = \frac{V}{d}$$

con V= tensione ai capi del bipolo e d= distanza nella direzione di propagazione dal bipolo stesso espresso in:

$$S = \frac{V}{m}$$

Lo spazio libero compreso fra un bipolo irradiante (ex antenna a frusta o a stilo) l'impedenza caratteristica vale

$$Z_0 = 120 \pi = 377 \Omega$$

Così come un circuito elettrico resistivo risponde alla legge di Ohm  $\frac{V}{I} = Z$

e come un circuito elettrico R-L-C risponde alla legge di Ohm generalizzata  $\frac{V}{I} = Z$  e con

dimensioni entrambe  $\frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} = \text{Ohm}$

un circuito elettromagnetico risponde alla legge che relaziona fra loro il campo elettrico E e il campo magnetico H mediante l'impedenza caratteristica de circuito  $Z_0$ :

$$\frac{E}{H} = Z_0$$

Che rappresenta il rapporto mediante il quale i valori numerici di E e di H si propagano nel mezzo trasmissivo quando agganciano combinati l'impedenza caratteristica del mezzo.

Infatti un antenna trasmette quando si pone l'estremo del polo + ad una distanza  $\lambda/2$  (antenna Hertziana) o  $\lambda/4$  (antenna Marconiana) dall'estremo - perchè considerata la frequenza del segnale e di conseguenza il valore di campo E ed H che si determinano, si ottengono le condizioni di propagazione quando la distanza fra i due estremi ( $\lambda/2$  o  $\lambda/4$ ) o lunghezza di dipolo ha una impedenza pari a quella caratteristica  $Z_0$  del mezzo trasmissivo entro cui si propaga la OEM; per lo spazio libero tale impedenza è fissa e vale  $Z_0 = 120\pi$  [ $\Omega$ ] e per questo la regola della lunghezza di dipolo ( $\lambda/2$  o  $\lambda/4$ ) è fissa.

Convieni per un alternativo modo di comprendere il campo magnetico H che esso è dato dal rapporto fra E e  $Z_0$  cioè esso può essere interpretato come la reazione dello spazio libero chiamato etere (cioè lo spazio vuoto privo di atmosfera) alla perturbazione causata nello stesso a causa della presenza di campo Elettrico al suo interno:

$$E = Z_0 H$$

e viceversa per quanto riguarda il campo magnetico in modo concatenato al campo Elettrico secondo il coefficiente di proporzionalità  $Z_0$ :

$$\frac{E}{Z_0} = H$$

## 9.2 Decibel e bilancio energetico

via radio in banda traslata e frequenza f che al suo aumentare aumenta l'attenuazione in dB del mezzo trasmissivo o la sua Z caratteristica. La trasmissione può essere Analogica o Digitale a seconda che la modulante sia analogica o digitale. Si distinguono:

ANALOGICHE  
AM, DSB, SSB  
FM  
PM

DIGITALI  
ASK  
FSK  
PSK-4PSK, QPSK, QAMPSK,  
DBPSK 1Mbit/s DQPSK 2Mb

via cavo doppino intrecciato singolo o multipli in banda base o traslata con tecnica FDM standard RS232 MAX232 RS 485 MAX485, RS422 e gerarchia gestita con protocolli fieldbus, data link HART, ASI ProfibusDP, Ethernet con cavo RJ-45 con 4 paia di doppini e cablaggio di tipo T568A e T568B con protocollo IP a livello network, TCP e UDP livello Trasporto, Fieldbus in tempo reale, SERCOS profinet, CAT per ridurre la latenza basati su ethernet

Collegamento di telecomunicazioni

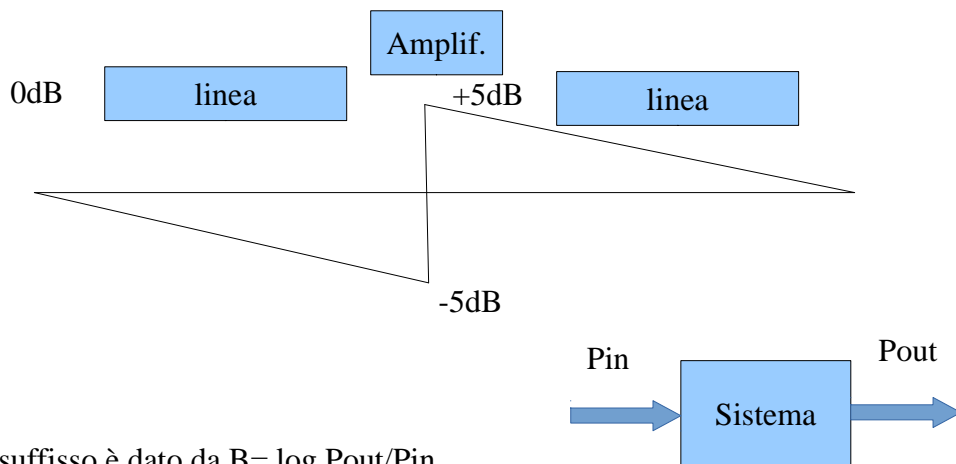
mediante reti via cavo a commutazione di circuito (telefonia fissa)  
(Comunicazioni in banda base)

mediante reti wireless: WPAN, WLAN, WMAN  
WWAN  
FIBRA OTTICA unimodale multimodale

Si effettua trasmissione in banda base quando la frequenza trasmessa è uguale a quella del generatore, per esempio la nostra voce è un sistema di trasmissione in banda base con pure una comunicazione telefonica. Si procede alla comunicazione in banda traslata quando il mezzo trasmissivo la distanza sono tali da rendere possibile la trasmissione con la banda di frequenze del generatore cosicché bisogna traslare la frequenza verso valori più idonei alla trasmissione in quel determinato mezzo trasmissivo ed alla distanza imposta dal progetto. -si parla così di onda portante alla frequenza idonea a trasmettere efficacemente nel mezzo trasmissivo a disposizione, di onda modulante quella emessa dal generatore di segnale da trasmettere e di onda modulata quella che viene effettivamente trasmessa dal driver o dall'antenna.

Questi e molti altri ancora i metodi fra loro intercomunicanti (per esempio i collegamenti radio FM di tipo broadcasting si avvalgono di tecnica FDM per così suddividere la banda totale riservata alle trasmissioni radio FM in zona VHF da 88 a 108 Mhz in 100 canali di banda pari a 200 KHz ognuna).

Ogni tipo di tecnica utilizzata per realizzare una rete di telecomunicazioni deve seguire delle procedure di bilancio Energetico che per semplicità si conduce introducendo il calcolo in scala logaritmica introducendo il concetto di Bel. Di seguito si ripropone lo schema di bilancio di energia in dB della linea e la rigenerazione del segnale mediante amplificazione intermedia



Il Bel senza suffisso è dato da  $B = \log P_{out}/P_{in}$   
il decibel **dB=10 log Pout/Pin**

dato che  $P = \frac{V^2}{R}$  e ipotizzando si tratti di un quadripolo simmetrico con Resistenza caratteristica uguale a R

si ha

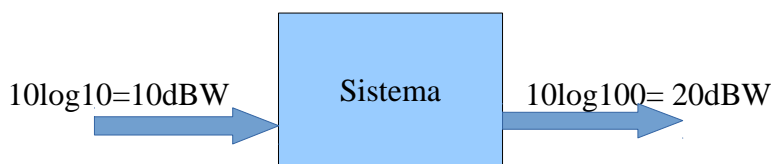
$$G_{dB} = 10 \log \left( \frac{V_{output}}{V_{input}} \right)^2 = 20 \log \left( \frac{V_{output}}{V_{input}} \right) [dimensioni dB]$$

così per la corrente  $P = RI^2$

$$G_{dB} = 10 \log \left( \frac{I_{output}}{I_{input}} \right)^2 = 20 \log \left( \frac{I_{output}}{I_{input}} \right) [dimensioni dB]$$

10W	↔	100W dimensioni dBW o $dB_W$
10mW		20mW dimensioni dBmW o $dB_{mW}$
2V		4V dimensioni dBV o $dB_V$
5mV		5mV dimensioni dBmV o $dB_{mV}$
.....		.....

di seguito la rappresentazione della prima grandezza sopra elencata in dB con suffisso (cioè l'argomento del log ha le dimensioni del suffisso):



il guadagno in dBW del sistema è pari a (20-10) dBW

in dB (assoluti applicando  $10 \log P_{out}/P_{in}$  si noti che si effettua il log di un argomento adimensionale) =  $10 \log 10 = 10$  dB

esprimendo Pin in dBm  $10 \log 10^4 = 40$  dBmW

esprimendo Pin in dBμ  $10 \log 10^7 = 40$  dBμW

Si può esprimere in dB ogni grandezza che utilizziamo per effettuare i calcoli di bilancio energetico di una linea:

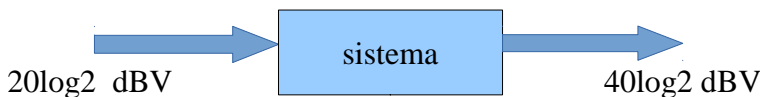
$20 \log 2$  è il valore in dBV di 2V

$60 \log 2$  è il valore in dBmV di 2V

$120 \log 2$  è il valore in dBμV di 2V

$40 \log 2$  è il valore in dBV di 4V

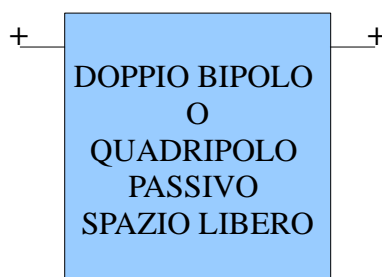
calcolando il guadagno (o attenuazione del sistema) sia in dB assoluti che in dB con suffisso limitandosi a trasformare un valore di un parametro fisico di riferimento in dB con suffisso e poi eseguendo il bilancio nel modo seguente



guadagno del sistema  $(40-20) \log 2$  dBV che da lo stesso risultato del calcolo con i dB assoluti infatti:

$$20 \log 4/2 = 20 \log P_{out}/P_{in} = 20 \log 2$$

### Attenuazione spazio libero





**Asl (dB) = 10Log Pin/Pout** entità della diminuzione di potenza del segnale irradiato nello spazio libero che giunge al ricevitore posto ad una certa distanza dalla antenna trasmittente.

$$\text{Asl(dB)} = 32,5 + 20\text{Log } f \text{ (Mhz)} + 20\text{Log } r \text{ (Km)}$$

con  $f$  = frequenza segnale portante trasmesso e  $r$  = distanza dall'antenna in Km.

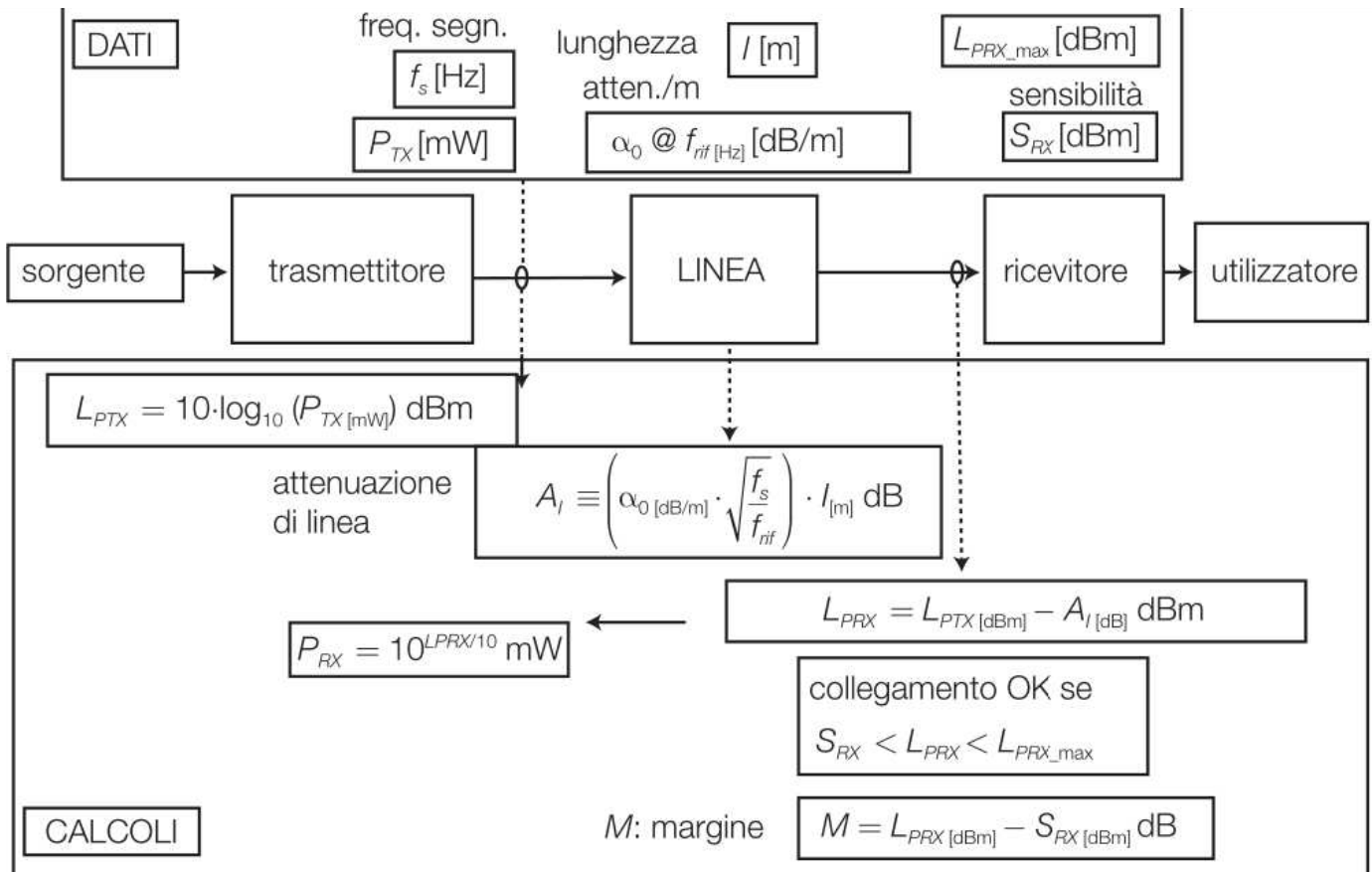


Fig.2 : Schema di calcolo energetico della linea ;

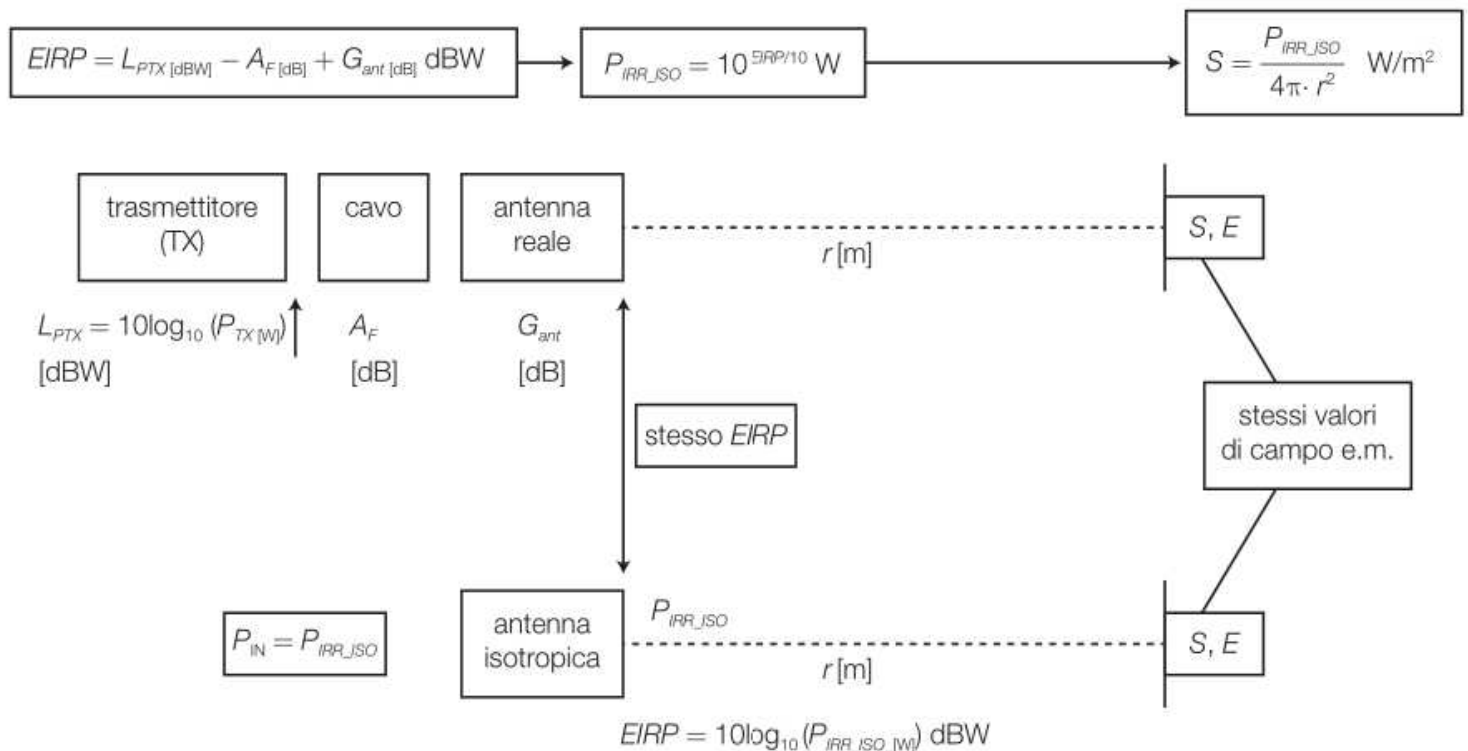
**EIRP:** Effettiva Potenza Irradiata nella direzione di massimo irraggiamento da un antenna Isotropica per avere lo stesso livello di campo Elettrico E dell'antenna effettivamente utilizzata misurato alla stessa distanza dall'antenna.

**Devono essere rispettati i livelli inposti dalla legge sull'inquinamento elettromagnetico per la sicurezza delle persone che si trovano nelle immediate vicinanze di una o più fonti di radiazioni elettromagnetiche** (ex per lavoro per non più di 4 ore continuative di esposizione) come un telefonino cellulare oppure un forno a micro-onde oppure ad una TV un PC o ancora una antenna di un radar militare o installazioni di rigeneratori (ripetitori) o di riflettori (trasponder) di segnale radio, **relativamente alla densità di potenza  $S [W/mq] = 0.1$  con  $3MHz < f < 300 Ghz$  e di campo elettrico  $E = 6 [V/m]$  con  $0.1MHz < f < 300 Ghz$ .** Questi ultimi vengono calcolati nel seguente modo:

$$S = \frac{P_{IrrIso}}{4\pi r^2} \frac{W}{m^2}$$

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{30 P_{IrrIso} [W]} \frac{V}{m^2}$$

Tabella 1: Sintesi delle definizioni date finora in ordine a EIRP che lega antenna reale ed antenna isotropica;



## ESERCIZIO 1

Impianto con trasmettitore Tx con P disponibile = 300 W;  
cavo coassiale l=50 m, coefficiente di attenuazione  $\alpha=10$  dB/100m  
antenna G=6 dB  
**calcolare:**

### 1. EIRP:

$$EIRP = L_{PTX} [dBW] - A_{Linea} [dB] + G_{Ant} [dB]$$

**2. Minima distanza teorica a cui l'impianto va installato da un'abitazione per rispettare i limiti di legge sull'inquinamento elettromagnetico:**

**Livello di potenza disponibile al trasmettitore:**

$$L_{PTX} = 10 \log P = 10 \log (3 \times 100) = 10 (\log 3 + \log 100) = 10 (0,477 + 2) = 24,77 \text{ dBW}$$

**Attenuazione della linea:**

$$A_{Linea} = \alpha \cdot l = 10 \frac{\text{dB}}{100 \text{ m}} \cdot 50 \text{ m} = 5 \text{ dB}$$

$$EIRP = L_{PTX} [dBW] - A_{Linea} [dB] + G_{Ant} [dB] = 24,77 - 5 + 6 = 25,77 \text{ dB}$$

**Potenza Irradiata nella direzione di massimo irraggiamento da una antenna isotropica che produce o stesso campo E alla stessa distanza (quella nella direzione di massimo irraggiamento):**

$P_{IrrIso} = 10^{\left(\frac{EIRP}{10}\right)} = 10^{(2,577)} = 377,57 \text{ W}$  **la precedente formula si ottiene dalla definizione di EIRP:**

$$EIRP = 10 \log P_{IrrIso}$$

**Densità di potenza (Vettore di Pointing) massima 0.1 W/mq:**

$$S = \frac{P_{IrrIso}}{(4\pi r^2)} < 0,1 \Rightarrow r \geq \sqrt{\left(\frac{P_{IrrIso}}{(0,4\pi)}\right)} = 17,33 \text{ m}$$

**Campo Elettrico massimo 6 V/m:**

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{(30 P_{IrrIso})} \Rightarrow r \geq \frac{1}{E_{max}} \sqrt{(30 P_{IrrIso})} = 17,74 \text{ m}$$

la più conservativa delle due distanze è la seconda perciò risulta che la distanza minima r alla quale può trovarsi un'abitazione dall'antenna deve essere maggiore di 17,74 m.

## ESERCIZIO 2.

Gli access point per legge devono operare con un valore massimo dell'EIRP pari a 20 dBm.

Un access point ha una antenna con  $G = 2,2$  dB calcolare:

1. campo Elettrico  $E$  e densità di potenza  $S$  a  $r = 10$  m dall'antenna;
2. Pmax operativa dell'access point.

Potenza irradiata nella direzione di massimo irraggiamento da una antenna isotropica che produca pari valore di campo elettrico alla distanza  $r$  (di massimo irraggiamento) dell'antenna reale:

$$P_{IrrIso} = 10^{\left(\frac{EIRP}{10}\right)} = 10^{(2)} = 100 \text{ mW}$$

### Campo elettrico $E$ :

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{(30 P_{IrrIso})} = \frac{1}{10} \sqrt{(30 \cdot 0.1)} = 0,173 \text{ V/m}$$

### Densità di potenza $S$ :

$$S = \frac{E^2}{Z_0} = 0,173^2 / 377 = 80 \mu \text{W/m}^2$$

### EIRP

Essendo EIRP max = 20 si ha

$$r \geq \sqrt{\left(\frac{P_{IrrIso}}{(0,4 \pi)}\right)} = 17,33 \text{ m}$$

a 10 m di distanza non potrebbero sostare persone per periodi prolungati (oltre le 4 ore lavorative), cio nonostante:

$$EIRP = L_{PTX} [dBm] - A_L + G_{Ant} [dB]$$

$$EIRP_{max} = 20 (dBm) = L_{PTX} [dBm] - A_L + G_{Ant} [dB]$$

### Attenuazione della linea (spazio libero)

Assunta valida la formula empirica  $Asl(dB) = 32,5 + 20 \log f \text{ (Mhz)} + 20 \log r \text{ (Km)}$  si ottiene considerando una  $f = 2.4$  Ghz:

$$Asl(dB) = 32,5 + 20 \log 2400 - 40 \log 10 = 27,604 \text{ dB}$$

Infine risolvendo l'espressione dello EIRP con il livello di potenza disponibile al trasmettitore

$$L_{PTx} [dBm] = EIRP_{max} - G_{Ant} [dB] + A_L = 20 - 2,2 + 27,604 = 45,404 \text{ dBm}$$

$$L_{PTxMax} = 10^{\left(\frac{L_{PTx}}{10}\right)} = 10^{(4,54)} = 34674 \text{ mW} = 34,7 \text{ W}$$

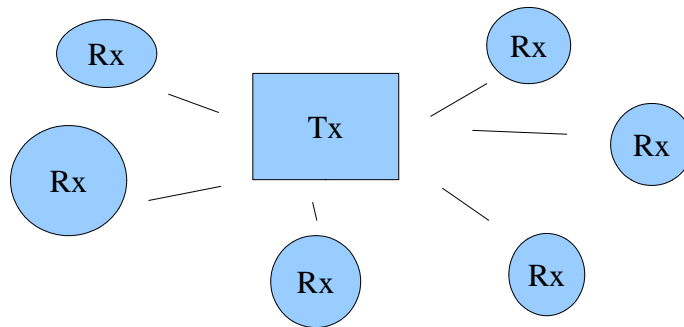
assumendo una  $f=5,76\text{GHz}$  si ottiene invece una attenuazione A dello spazio libero paria a:

$$Asl(dB) = 32,5 + 20\text{Log } 2400 - 40\text{Log } 10 = 27,604 \text{ dB}$$

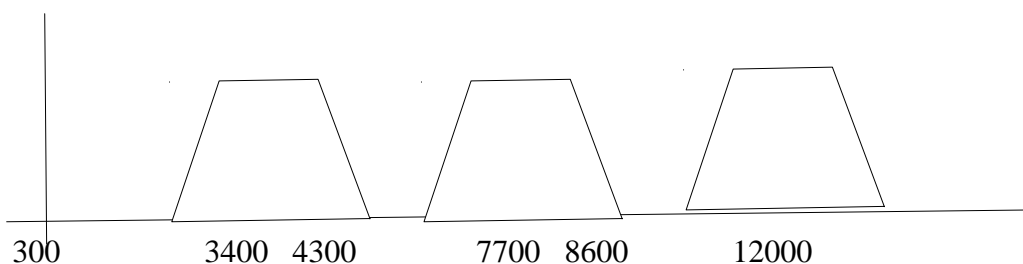
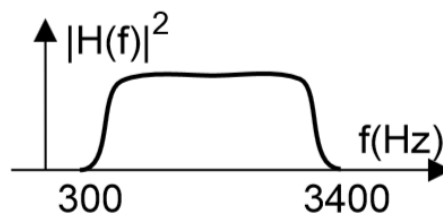
N.B eseguire il calcolo senza considerare la attenuazione dello spazio libero.

### 9.3 Multiplazione a divisione di frequenza (FDM)

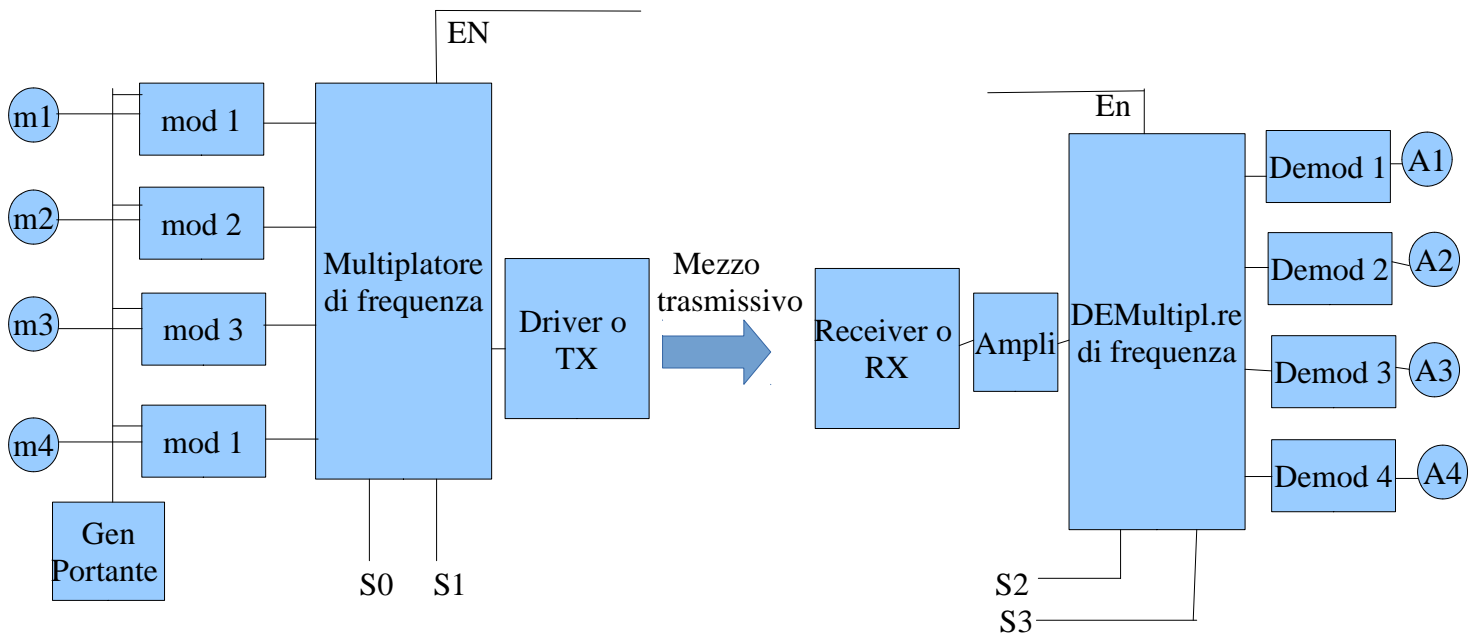
Trasmissioni in cosiddetto **broadcast** utilizzano antenne omnidirezionali poste al baricentro delle utenze da servire (1 Tx e molti Rx tipo di rete punto-multipunto) AM-FM e TV.



più segnali modulati con una tecnica analogica o numerica, transitano su uno stesso mezzo fisico centrati su una certa frequenza portante ognuno occupanti una banda assegnata (ad esempio la banda fonica (300-3400 Hz))



N.B. banda di guardia 900 HZ



## 9.4 Modulazioni analogiche

si consideri il seguente segnale periodico cosinusoidale

$$m(t) = M \cos \varpi_m t$$

di pulsazione  $\varpi_m = 2\pi f_m$  e ampiezza massima M

$$p(t) = P \cos \varpi_p t$$

di pulsazione  $\varpi_p = 2\pi f_p$  e ampiezza massima P

**in ogni tipo di muduazione presentata si ha  $\varpi_p \gg \varpi_m$**

### 9.4.1 Modulazione AM

$$v(t) = [P + km(t)] \cos \varpi_p t \quad \text{con } k = \text{indice di sensibilità del modulatore};$$

oppure

$$v(t) = [P + kM \cos \varpi_m t] \cos \varpi_p t$$

raccogliendo P

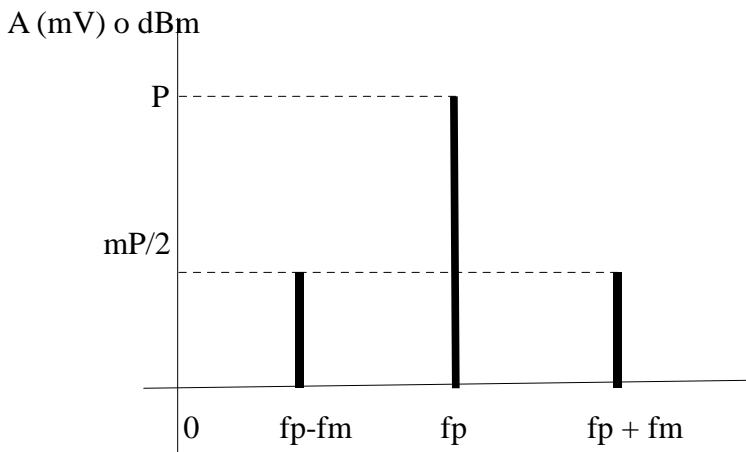
$$v(t) = P \left( 1 + \frac{kM}{P} \cos \varpi_m t \right) \cos \varpi_p t$$

ed infine

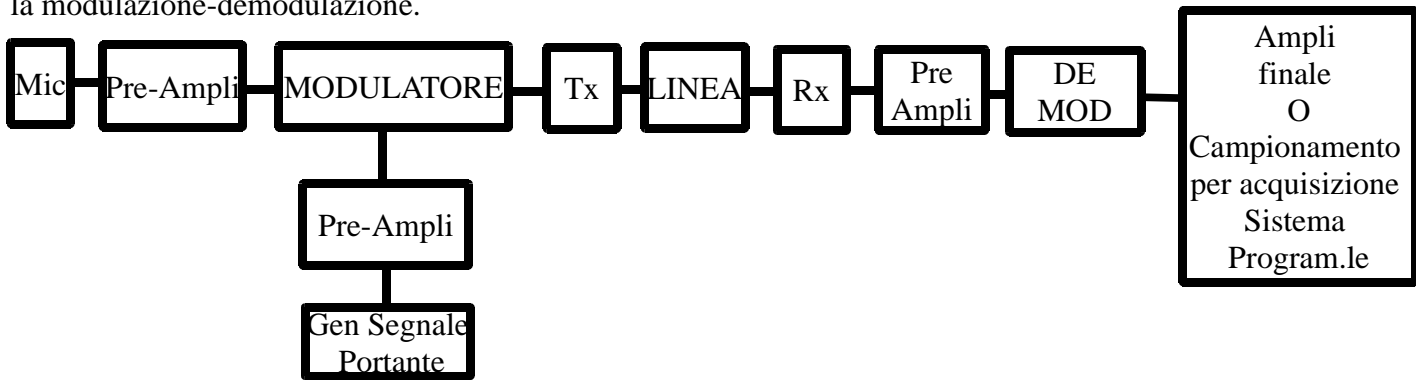
$$v(t) = P (1 + m_a \cos \varpi_m t) \cos \varpi_p t \quad \text{con } m_a \text{ indice di modulazione di ampiezza}$$

L'indice di modulazione deve essere  $m < 1$  altrimenti si ha sovra-modulazione e impossibilità di demodulazione in fase di ricezione.

Lo spettro ampiezza frequenza è il seguente:

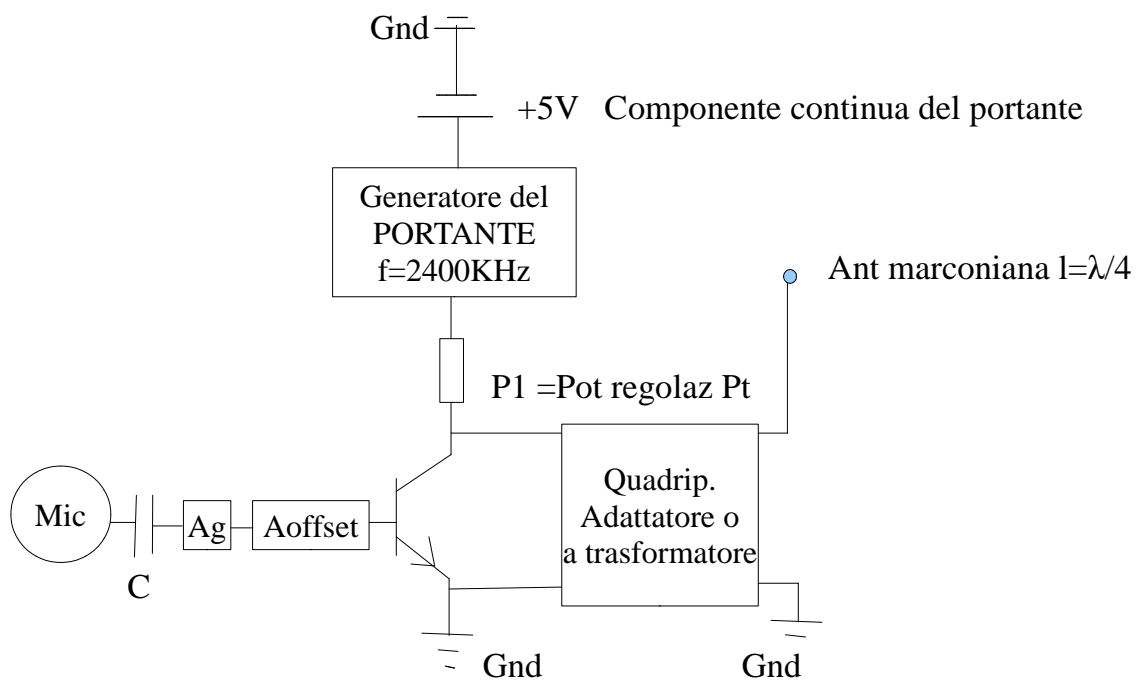
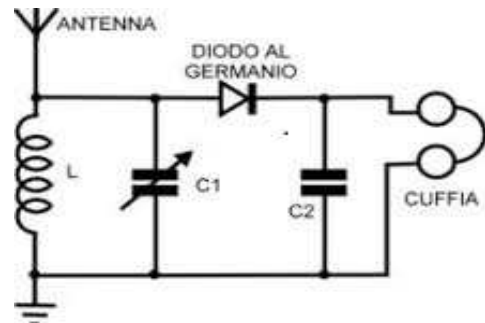
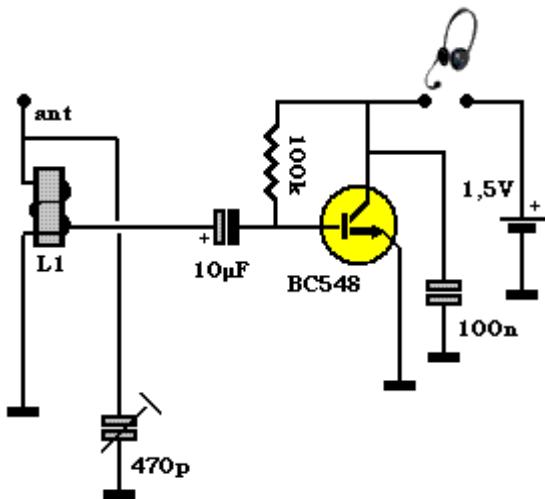


per maggiori condizioni immunità al rumore e minor dispendio di potenza in trasmissione si utilizza il sistema DSB-SC e SSB-SC in cui si considerano risp le due bande laterali e solo una di queste per la modulazione-demodulazione.



*Schema generale di un sistema di trasmissione analogica*

*Lo schema può essere applicato anche per la modulazione FM e la PM i modulatori ed i demodulatori sono di tipologia e circuiteria differente per ogni tipo di modulazione analogica che si considera.*



Le relazioni fondamentali che regolano la potenza del segnale portante  $P_{Port}$  a quella del segnale laterale  $P_{Lat}$  alla potenza totale trasportata dalle tre bande  $P_{Tot}$  sono le seguenti:

$$P_{Tot} = P_{Port} + P_{Lat} + P_{Lat} \text{ [W]}$$

oppure

$$P_{Tot} = P_{Port} + 2 P_{Lat} \text{ [W]}$$

da cui  $P_{Lat} = \frac{P_{Tot} - P_{Port}}{2}$  [W]

$$P_{Lat} = \frac{m_a^2}{4} P_{Port} \quad [W]$$

$$P_{Port} = \frac{P^2}{(2R)} \quad [W]$$

con P ampiezza massima della portante e R resistenza del carico (vedi adattamento delle linee di trasmissione); ed infine:

$$P_{Tot} = P_{Port} \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) \quad [W]$$

Altre modulazioni analogiche sono la modulazione di frequenza e di fase (**FM e PM**) che in questa sede non analizziamo dal punto di vista fisico-matematico; ci limitiamo a fornire indicativamente il grafico della portante della modulante e della modulata della FM premettendo che entrambe le modulazioni forniscono qualitativamente lo stesso spettro Ampiezza/frequenza della AM.

### Esercizi

1. sia data la corrente del segnale portante  $I_{Port}$  e quella totale del segnale modulato  $I_{Tot}$  calcolare m (indice di modulazione di ampiezza)
2. sia data la tensione del segnale portante  $V_{Port}$  e quella totale del segnale modulato  $V_{Tot}$  calcolare m (indice di modulazione di ampiezza)
3. si conosce l'ampiezza massima del segnale portante  $P=10$  V, la  $R=50 \Omega$  del carico adattata e  $m=0.8$  calcolare la potenza totale, la potenza di una banda laterale e la potenza della portante.
4. Si conosce  $m=0.7$  e la Potenza totale del modulato  $P_{Tot}$  : calcolare la potenza della portante e la potenza delle due bande laterali.
5. Si conosce la formula analitica del segnale modulato in AM  $v(t)=10(1+0,5 \cos 2\pi 10^3 t) \cos 2\pi 10^6 t$  che incide su una resistenza di carico adattata  $R=50 \Omega$  calcolare: Potenza segnale portante, Potenza delle due bande laterali e potenza totale.

## 9.5 Modulazioni numeriche

### FSK

si tratta di una modulazione con modulante numerica di frequenza con portanti analogiche di 1200 e 2400 kHz rispettivamente quando il segnale modulante ha valore 1 e valore 0

cosicché ad una sequenza 1010

verrà trasmesso una serie di segnali sinusoidali a 1200-2400-1200-2400 khz e ampiezza costante di 5 V.

Il protocollo UART con bus in corrente per utilizzi in zone con pericolo di esplosione utilizza le frequenze precedenti.

### ASK

si tratta di una modulazione con modulante numerica di frequenza con portanti analogiche di per ex 2400 kHz quando il segnale modulante ha valore 1 e assenza di segnale quando il valore è 0.

### PSK

si tratta di una modulazione con modulante numerica di frequenza con portanti analogiche 2400 kHz e fase  $\pi/2$  e  $-\pi/2$  rispettivamente quando il segnale modulante ha valore 1 e valore 0

## 9.6 Riflessione, rifrazione, legge di snell e angolo limite

Le onde elettromagnetiche sono soggette a riflessione e rifrazione quando impattano contro un mezzo espressa mediante il cosiddetto indice di rifrazione  $n_1$  che abbia maggiore o minore densità che è espressa mediante il cosiddetto indice di rifrazione del mezzo  $n_2$  del mezzo in cui la OEM si propaga prima di impattare. L'angolo di rifrazione  $\vartheta_2$  può essere maggiore o minore dell'angolo incidente  $\vartheta_1$  se:

$$n_1 > n_2 \text{ allora } \vartheta_2 > \vartheta_1$$

altrimenti se

$$n_1 < n_2 \text{ allora } \vartheta_2 < \vartheta_1$$

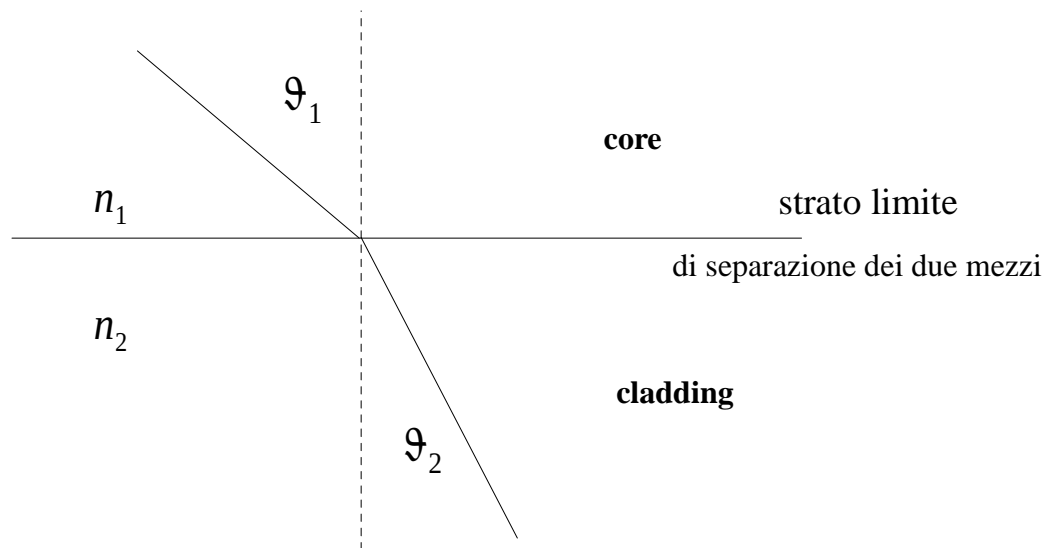
il tutto si esprime con la legge di Snell

$$\text{sen } \vartheta_1 : \text{sen } \vartheta_2 = n_1 : n_2$$

da cui si ricava il cosiddetto angolo limite che è quell'angolo  $\vartheta_1$  incidente che produce rifrazione pari a  $90^\circ$  ( come quando si lancia un sasso in acqua secondo una ben determinata inclinazione rispetto alla superficie dell'acqua, questi rimbalza senza penetrare sott'acqua. Ciò si può riassumere considerando che l'angolo di rifrazione vale  $90^\circ$  e sostituendo nella legge di snell si ottiene

$$\text{sen } \vartheta_1 : \text{sen } 90^\circ = n_1 : n_2 \text{ perciò}$$

$\text{sen } \vartheta_1 = \frac{n_1}{n_2}$  con  $n_1 < n_2$  altrimenti il sen dell'angolo limite risulterebbe maggiore di 1 (impossibile);



Si ricorda che per avere rifrazione pari a  $90^\circ$  e perciò per non avere dispersione dell'onda incidente all'interno del mezzo 2 deve essere :

$n_1 > n_2$  che è la relazione che caratterizza il Core centrale di una fibra ottica del diametro di qualche  $\mu\text{m}$  e coefficiente  $n_1$  rispetto al Cladding che lo avvolge con coefficiente  $n_2$  ad avvolgere la cladding si trova il Buffer ed infine uno strato isolante chiamato Jacket.

Il diodo laser alla afrekuensi visibile deve essere posizionato ad una distanza dall'ingresso della fibra ottica tale da formare almeno l'angolo limite incidenteper evitare rifrazione che disperderebbe il segnale con la conseguente perdita di informazioni. Esistono fibre ottiche unimodali che trasportano OEM alla frequenza dell'IR, e F.O multimodali che trasportano OEM alla frequenza del verde e del blu-violetto. Quelle appena citate sono le tre bande di frequenza di trasmissione informazioni con fibra ottica poichè le altre frequenze della banda complessiva del visibile sono condizionate da livelli di attenuazione  $A[\text{dB}]/\text{Km}$  molto alti che ne rendono attualmente onerosa la adozione.

